UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01209532 9

H 87.123

G H Hardy

DE L'EXPÉRIENCE

EN

GÉOMÉTRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

32821 Quai des Grands-Augustins, 55.

DE L'EXPÉRIENCE

EN

GÉOMÉTRIE

PAR

C. DE FREYCINET,
DE L'INSTITUT.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903
(Tous droits réservés.)

LIBRARY
NOV 2 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

QA
445
F7

INTRODUCTION.

La Géométrie est une Science déductive, personne n'en doute. A ce titre, elle comprend : 1° des concepts ou des idées générales formées à l'occasion des objets qu'elle considère; 2° des axiomes ou des vérités indémontrables par le raisonnement; 3° des propositions ou des vérités dérivées des précédentes à l'aide de la logique et du calcul.

Cette Science déductive est-elle entièrement rationnelle ou a-t-elle une partie expérimentale? Relève-t-elle des Mathématiques pures ou de la Physique mathématique? La réponse dépend du caractère qu'on reconnaît aux axiomes. S'ils pro-

cèdent directement de la raison, comme ceux de l'Arithmétique et de l'Algèbre, s'ils rentrent dans la catégorie des vérités « évidentes par elles-mêmes », la Géométrie est uniquement mathématique. Si, au contraire, ils s'appuient sur l'expérience, sur l'observation du monde extérieur, alors la Géométrie est une branche de la Physique mathématique.

Or aucun savant aujourd'hui ne soutiendrait que les axiomes géométriques doivent être mis sur le même pied que les axiomes de l'ordre logique : ils n'ont pas le même caractère de nécessité. Il n'est nullement évident de soi, par exemple, que, d'un point donné, on puisse toujours mener une parallèle à une droite donnée et qu'on n'en puisse mener qu'une; ou qu'une ligne droite qui a deux de ses points dans un plan s'y trouve contenue tout entière. Ces vérités, bien que nous paraissant indiscutables, par suite de la longue habitude que nous en avons, ne s'imposent pas

d'elles-mêmes à l'esprit. Aussi de très grands géomètres ont-ils cru pouvoir faire un choix et, rejetant certaines d'entre elles, construire avec les autres des enchaînements nouveaux. L'abandon de l'axiome sur les parallèles, plus connu sous le nom de *postulatum d'Euclide,* a donné naissance, au siècle dernier, à des variétés fort intéressantes de Géométrie dite *non-euclidienne*.

Pour ceux qui pensent, comme moi, que ces axiomes, dépourvus du caractère de nécessité, sont cependant certains et ont une portée objective, leur origine est donc expérimentale.

Quelques savants, et des plus illustres, n'acceptent pas l'alternative. Les axiomes géométriques, selon eux, ne sont ni de l'ordre logique, ni de l'ordre expérimental: ils sont « des définitions déguisées, des conventions ». Malgré ces hautes autorités, je n'y saurais souscrire. Les définitions, quoi qu'on en dise, ne sont pas absolument

arbitraires; elles ne dépendent pas uniquement de notre vouloir. Encore faut-il que l'objet défini soit possible. Nous n'aurions pas le droit de définir triangle birectangle un triangle rectiligne ayant deux angles droits, puisqu'un tel triangle n'existe pas. De quel droit donc définirions-nous parallèles des droites qui, situées dans le même plan, « ne se rencontrent pas », si de quelque façon nous n'avions pas appris que la non-rencontre est possible? Car il n'est pas évident, *a priori,* que des droites dans un même plan ne se rencontrent pas toujours. De même, comment définirions-nous droite une ligne telle que par deux points donnés « il n'en puisse passer qu'une seule », si déjà nous n'avions reconnu qu'une pareille ligne existe réellement? Ici encore il n'est pas évident que par deux points on ne puisse pas toujours faire passer plusieurs lignes de la même espèce. En résumé, on n'a pas le droit de définir un objet par une propriété qui peut se

trouver irréalisable. De sorte qu'au lieu de dire que les axiomes sont des « définitions déguisées », il serait plus juste de dire que les définitions, du genre de celles que j'examine, sont des « axiomes déguisés ».

Cherchons donc ces axiomes dans les enseignements de l'expérience.

Je dois faire une remarque qui n'est pas sans rapport avec le sentiment de répugnance que j'ai signalé chez certains géomètres, et qui peut servir à l'expliquer. Le mot « expérience » éveille d'ordinaire une idée qui n'est pas tout à fait celle qu'il faut avoir en Géométrie. Dans les Sciences naturelles, l'expérimentation porte sur des choses concrètes. Pour vérifier, par exemple, que les poids des corps sont proportionnels à leurs masses, on prend des substances diverses, qu'on laisse tomber simultanément dans le vide, et l'on constate l'identité de la chute. Aucune faculté transcendante n'est mise en jeu dans

cette épreuve, où il s'agit de noter simplement un fait matériel. En Géométrie, il en va différemment. Les observations faites sur les corps sont le prélude d'opérations d'un autre ordre. Après avoir reconnu, je suppose, qu'une règle rigide s'applique, dans tous les sens, sur une glace bien dressée, on réduit, par la pensée, et l'on amincit de plus en plus la règle et la glace de manière à n'avoir plus devant soi qu'une longueur et une surface insaisissables. En outre on dépouille cette ligne et cette surface des moindres irrégularités que l'exécution matérielle avait pu laisser subsister dans les objets primitifs; on substitue des types parfaits aux spécimens imparfaits que l'art avait créés, et l'on attribue aux premiers, en termes absolus, les relations, parfois approximatives, trouvées pour les seconds. Ainsi la coïncidence à peu près complète observée entre la règle et la glace est regardée comme tout à fait rigoureuse quand on passe à la ligne et à la surface.

On est autorisé à agir de la sorte: car les très légers écarts qui se manifestent sur les objets réels s'atténuent avec le progrès de leur fabrication, et seraient mathématiquement nuls si l'on pouvait opérer sur des produits achevés.

Seconde différence non moins notable : l'idée de l'infini s'introduit en Géométrie, tandis qu'elle est absente de l'ordre physique. Nous ne considérons pas de masse infinie, de force infinie, de vitesse infinie, de chaleur ou de lumière infinie, nous ne les concevons même pas; alors que nous concevons des lignes et des surfaces sans bornes et que nous leur accordons, par une généralisation hardie, les propriétés reconnues vraies sur des étendues limitées, et souvent très faibles. Ayant vérifié, par exemple, qu'entre deux points nécessairement rapprochés il ne passe qu'une seule ligne droite, nous admettons la loi pour toute distance et même si les points étaient indéfiniment éloignés. Cette induction su-

périeure, en vertu de laquelle nous concluons du fini à l'infini, est un des traits qui distinguent le mieux la Géométrie de la Physique proprement dite.

Les expériences géométriques sont donc idéalisées et généralisées ; mais ce sont, néanmoins, des expériences. Elles reposent sur un premier fait matériel et elles conduisent à des lois qui, dès lors, ne sont pas plus arbitraires que les types mêmes des spécimens auxquels on a eu recours.

Je n'ignore pas l'objection. « Les observations directes sont, dit-on, assez grossières et peu exactes. Entre le type et le spécimen la différence est sensible. S'il fallait calculer par de tels procédés le rapport de la longueur de la circonférence au diamètre (cet exemple est souvent cité), on n'obtiendrait jamais le nombre connu 3,1415926... ». Il est vrai. Mais pense-t-on que, s'il fallait déterminer, par des procédés matériels, la résultante de

deux forces concourantes, on tomberait exactement sur la diagonale du parallélogramme des forces? Beaucoup d'observations physiques en sont là. Elles ne donnent que des résultats approximatifs: le tact de l'expérimentateur lui sert à démêler la loi au milieu de chiffres parfois discordants. Mais, je me hâte de le dire, personne ne prétend que les lois ainsi trouvées soient immédiatement certaines, surtout quand leur expression est un peu compliquée. Répéter les expériences ne suffit même pas; l'exactitude ne se démontre que dans l'infinie variété des conséquences, par leur constant accord avec la Nature. C'est ainsi que les lois fondamentales du mouvement ont été mises hors de doute par l'étude des phénomènes astronomiques. Il n'en n'est pas autrement en Géométrie. Les lois, extrêmement simples d'ailleurs, déduites d'expériences élémentaires, et étendues ensuite, comme nous l'avons vu, se trouvent vérifiées après coup

par l'adaptation des théories aux faits naturels, adaptation d'autant plus exacte que les observations sont plus précises et se rapprochent davantage des conditions idéales pour lesquelles ces lois ont été formulées.

Dès l'instant que les axiomes géométriques correspondent à des réalités, nous n'avons pas le droit de rejeter tel ou tel d'entre eux, qui ne rentre pas dans le cadre que nous nous sommes tracé, ou dont la forme ne plaît pas à notre esprit. Je m'explique. Certes il est loisible à tout géomètre de faire parmi les axiomes le choix qui lui convient, et avec ceux qu'il conserve de construire un assemblage cohérent, à l'abri de toute critique. Mais ces enchaînements bien liés, logiquement irréprochables, ne seront pas en harmonie avec le monde extérieur. Ils différeront les uns des autres, ce qui montre assez qu'aucun ne peut prétendre à exprimer la nature des choses. On obtiendrait aussi aisément un système cohé-

rent en Mécanique si l'on s'avisait de rejeter la loi d'inertie ou la loi de réaction, mais les conséquences déduites de semblables prémisses n'auraient plus aucun rapport avec les règles qui gouvernent l'Univers. La discordance est moins choquante en Géométrie, parce qu'on se meut dans des régions d'apparence plus abstraite, mais au fond elle est la même. Il faut donc prendre ces Géométries diverses comme des exercices logiques, mais point comme des branches de la Physique mathématique. On ne saurait dire d'ailleurs si elles sont plus ou moins exactes; elles le sont toutes au même degré, puisqu'elles sont parfaitement fidèles chacune à leurs principes et que, dans l'ordre conventionnel, ceux-ci sont également légitimes. On ne peut même prétendre, à ce point de vue, qu'elles soient inférieures à la Géométrie ordinaire, la seule différence consistant, je l'ai dit, dans un certain éloignement des réalités. Ces exercices, bien que dépourvus — au

moins en partie — de sanction pratique, n'ont pas été inutiles au progrès des idées. Ils ont agité des problèmes abstraits extrêmement curieux et ils nous ont fait mieux saisir la métaphysique de la Science en démontant les pièces du mécanisme et les faisant fonctionner séparément sous nos yeux. L'esprit s'était habitué à s'appuyer sur des principes, sans bien s'être rendu compte de leur solidité. Les Géométries non-euclidiennes nous ont forcés à sortir de cette quiétude et à soumettre nos connaissances à une critique sévère. Elle ont promené un flambeau sur des points demeurés obscurs dans la Géométrie traditionnelle. D'autre part elles ont fourni de précieuses interprétations à des résultats analytiques.

Un argument mis en avant pour justifier la suppression du postulat d'Euclide, — source première des nombreuses variantes, — c'est qu'elle n'entraîne aucune contradiction dans les propositions ultérieures; « or, dit-on, des contradictions ne man-

queraient pas de surgir si le postulat rentrait de quelque façon dans les axiomes acceptés ». L'argument a sa valeur vis-à-vis des personnes qui recherchent encore la démonstration logique de ce principe fameux. Mais ce n'est pas ainsi que celui-ci doit être envisagé. Le postulat sur les parallèles n'est pas une conséquence : il est une vérité initiale, au même titre que les autres axiomes. Il a sa certitude propre, également fondée sur l'expérience; ce qui explique pourquoi il est toujours resté indémontrable. Le rejeter, pour ce fait, c'est méconnaître sa vraie nature et amputer la Science d'un organe essentiel. Loin de réduire le nombre des axiomes, je crois, pour ma part, qu'il faudrait se tenir prêt à l'augmenter si l'on venait à rencontrer plus tard quelque relation dont l'exactitude ne ferait pas de doute, mais dont la justification rationnelle laisserait à désirer. Pourquoi refuser, en ce cas, de recourir à l'observation directe? de même qu'en

Mécanique, les trois premières lois du mouvement s'étant montrées impuissantes devant les phénomènes du choc, on n'a pas craint, au siècle dernier, d'adjoindre la loi de l'équivalence de la chaleur.

M'étant proposé, dans ce travail, de rechercher le rôle de l'expérience en Géométrie, j'ai dû naturellement m'attacher à la seule Géométrie où ce rôle ne fût pas arbitrairement restreint, c'est-à-dire à celle d'Euclide. Tout ce qui suit se rapporte donc exclusivement à elle, et j'ai laissé de côté, comme contraires à mon idée directrice, les variétés de Géométrie non-euclidienne, quel que pût être leur intérêt mathématique.

Dans une première division j'examine les principaux concepts. Dans la seconde, je cherche à montrer que les axiomes proprement géométriques, y compris le postulat d'Euclide, sont originairement des vérités expérimentales. Je termine par quelques réflexions sur le caractère de la

Géométrie et sur le problème général qui lui est posé, problème dont la nature, depuis les anciens, n'a pas changé.

DE L'EXPÉRIENCE

EN

GÉOMÉTRIE.

La Géométrie est brièvement définie : « La Science de l'étendue ». Certains auteurs, pour préciser, disent : « La Science de *la mesure* de l'étendue ». C'est bien là, en effet, le but final des principales opérations géométriques; en tout cas, c'est le but qui lui a été assigné à l'origine. La Géométrie s'est formée sous l'impression du besoin de mesurer des étendues : longueurs, surfaces ou volumes. Deux grandes Sciences, la Géodésie et l'Astronomie, font continuellement appel à son concours. Mais, à côté de ce besoin, il naît chez le géomètre une curiosité d'un ordre élevé, qui se complaît dans les problèmes envisagés en eux-mêmes, abstraction faite des applications

qu'on en peut tirer. De là tout un ensemble de recherches, qui n'ont pas toujours la mesure pour objet immédiat, quoiqu'elles la facilitent singulièrement, et qui consistent à déterminer les relations de grandeur et de position entre les éléments des figures tracées dans l'espace. Tel est le champ d'action du géomètre : il établit des relations; et ces relations, tantôt il les utilise pour calculer des étendues, tantôt il les enregistre simplement, pour la plus grande satisfaction de son désir de connaître.

Il paraît donc que la définition la plus complète de la Géométrie est celle qui lui assigne l'étude des *Propriétés des Figures* et, par voie de conséquence, la mesure de certains de leurs éléments, à la faveur des relations qui expriment ces mêmes propriétés.

— —

CHAPITRE PREMIER.

CONCEPTS DE LA GÉOMÉTRIE.

Les concepts de la Géométrie sont suggérés par la vue du monde extérieur. Dans un espace absolument vide, livrés à nos seules pensées, nous serions incapables d'imaginer les plus simples des formes sur lesquelles s'exercent nos spéculations habituelles. Cette ligne droite et ce plan, qui semblent s'imposer à l'esprit, n'existeraient pas pour nous si nous n'en avions pas, dès l'enfance, rencontré de nombreux spécimens. Le rôle de notre raison a consisté à épurer les images reçues, à les dépouiller de leurs imperfections de détail et à les rapprocher d'un idéal que nous concevons à cette occasion, mais que par nous-

mêmes nous n'aurions pas su trouver. Ce qui nous donne le change à cet égard, c'est la netteté et la soudaineté de nos impressions. La conception du type suit de si près la vue de l'objet, que nous nous persuadons volontiers qu'elle en est indépendante, ou que même elle l'a précédée. Dès lors ces types prennent, à nos yeux, un caractère de nécessité qui les place en dehors du contrôle de l'expérience. Nous leur attribuons des qualités qui paraissent procéder de notre entendement, alors qu'en réalité elles nous sont dévoilées par l'observation de la Nature.

Cette vérité se dégagera davantage à mesure que nous avancerons dans l'examen des divers concepts.

ESPACE.

L'espace est le concept primordial de la Géométrie, car il est le contenant de tous les objets qu'elle considère. En m'exprimant ainsi, je me conforme aux idées reçues, que le géomètre [1] accepte également. Il n'entre pas dans les discussions métaphysiques soulevées au sujet de l'es-

[1] Je parle, bien entendu, du géomètre euclidien.

pace. Il ne se demande pas s'il a une existence « objective » ou « subjective ». Il admet avec le commun des hommes que la création se déroule dans son sein. Il le voit :

Infini, continu, homogène et pénétrable ou perméable.

Les trois premiers attributs permettent de concevoir des formes développées au delà de toute limite, sans arrêt ni rupture brusque, et indépendantes de la position qu'elles occupent dans l'espace. Quand on parle, par exemple, de lignes droites ou de plans prolongés indéfiniment, on ne fait que rendre la même pensée. Il est visible que ceux qui ne reconnaîtraient pas l'infinité et la continuité de l'espace ne seraient pas autorisés à employer de semblables locutions.

Le dernier attribut, la pénétrabilité parfaite ou l'absence absolue de résistance au déplacement des objets, donne au géomètre le droit de transporter par la pensée, d'une région dans une autre, et d'y tourner de mille manières la forme considérée, sans qu'il en résulte aucune altération dans les rapports de grandeur ou de position qui existent entre les diverses parties de l'assemblage. En d'autres termes, les êtres géométriques

sont intrinsèquement les mêmes en mouvement et au repos. De telle sorte que si, une fois déplacés, on les ramène par un mouvement inverse à leur situation primitive, ils s'y adaptent exactement et reproduisent la même image. Ils coïncident en tous points avec la première forme qu'ils dessinaient dans l'espace.

Cette importante faculté, quoique universellement utilisée, est assez souvent passée sous silence, comme si elle allait de soi et n'avait pas besoin de commentaires. Cependant, lorsqu'on y réfléchit, on reconnaît qu'elle n'a pas de préexistence dans notre esprit et qu'elle est en relation étroite avec le milieu que nous habitons. Si au lieu d'être entourés d'une atmosphère transparente, qui d'ordinaire oppose peu de résistance à nos mouvements, nous étions plongés dans un liquide, même homogène et tranquille, nous aurions eu sans doute beaucoup de peine à nous élever à la conception d'un espace absolument vide, de l'espace géométrique. Nous nous figurerions probablement que l'Univers entier est rempli de ce liquide dont nous n'apercevons pas les limites, et, dès lors, nous ne songerions pas à faire glisser ou tourner dans son sein, pour les besoins de notre démonstration, un assemblage

géométrique dont il nous semblerait que la fragile harmonie va être altérée. Si nous usons de cette faculté avec une complète sécurité, c'est grâce aux conditions dans lesquelles il nous a été donné de vivre et dont le caractère contingent ne saurait échapper.

Les mouvements auxquels je viens de faire allusion sont plutôt fictifs. Le géomètre les imagine, il les voit en pensée, et, dans la plupart des cas, cela suffit à ses spéculations. Si parfois il les réalise, l'idée de temps n'y est jamais attachée. C'est le changement de position seul qui lui importe. Il n'y a donc aucune analogie, même lointaine, entre ce genre de déplacement et le transport mécanique des corps. La différence profonde entre les deux Sciences, c'est que l'idée de temps est absente de l'une et se trouve, dans l'autre, indissolublement liée à l'idée d'espace. La Géométrie apparaît donc plus simple que la Dynamique, puisqu'elle emploie un seul concept au lieu de deux. Si, en fait, elle n'exige pas une moindre puissance d'esprit et si elle présente des résultats aussi diversifiés et aussi complexes, c'est parce qu'elle s'est attachée avec une rare persévérance à poursuivre les rapports des choses dans leurs détails les plus cachés, et surtout parce

que le nombre des formes à considérer est sans limite. Le géomètre s'élève à chaque instant au-dessus du réel; il donne l'essor à son imagination et crée des formes de plus en plus ingénieuses, de plus en plus compliquées, dont les propriétés offrent à ses investigations un champ toujours renouvelé. Tandis que le mécanicien s'abstient, en général, d'introduire des forces absolument arbitraires et qu'il s'étudie plutôt à exprimer les phénomènes naturels, le géomètre, après avoir satisfait aux problèmes de l'ordre pratique, explore un domaine purement idéal et poursuit des solutions destinées peut-être à n'être jamais appliquées. Il cultive la Science pour la Science même, et se contente des jouissances intellectuelles qu'elle procure.

La notion d'espace n'appartient pas exclusivement à la Géométrie. Elle lui est même antérieure. Le spectacle du monde extérieur suffit à la suggérer sans qu'il soit nécessaire d'approfondir les phénomènes de grandeur qui peuvent s'y présenter. Il n'est pas indispensable de savoir mesurer les objets ni les intervalles qui les séparent pour acquérir la conception d'un contenant indéfini hors duquel nous n'imaginons pas

l'emplacement de la matière. Mais si la Géométrie n'a pas à cet égard la priorité, il faut reconnaître qu'elle précise et affine supérieurement la notion formée en dehors d'elle. Par l'emploi éminent qu'elle en fait, par les résultats qu'elle en tire, elle a le droit de la revendiquer, de concert avec la Mécanique, et plus fortement encore que cette dernière, car elle la devance et lui prépare des matériaux essentiels.

Étendue. — Notre esprit ne saurait flotter toujours dans le vague infini de l'espace. Il aime à se poser sur quelque chose de précis, en tout cas de fini. Nous envisageons donc des portions limitées de l'espace auxquelles nous donnons le nom d'étendue. La grandeur ainsi désignée peut d'ailleurs avoir tous les degrés : nous disons aussi bien l'étendue du système solaire, voire de la voie lactée, que l'étendue d'un champ, d'une ville. L'étendue est donc de l'espace fini, mais dont les bornes ne sont pas toujours bien déterminées. C'est l'existence de ces bornes, même mal connues, qui la différencie de l'espace qui, lui, est conçu par nous comme n'en ayant pas. La Géométrie s'occupe essentiellement des étendues, car elle aboutit à des mesures, à des rap-

ports, qui n'ont de sens qu'entre quantités finies; c'est pourquoi on l'a dénommée *Science de l'étendue*. Les mots « Science de l'espace » seraient à la fois vides et ambitieux; ils ne représenteraient rien de net ni d'accessible. Toutefois, il faut se rappeler que l'étendue n'est point une entité distincte : elle est comprise dans l'espace absolu.

DISTANCE.

Par cela même que nous discernons dans l'Univers des êtres distincts, depuis les corps célestes dont l'écart mutuel est immense, jusqu'aux objets à notre usage, qui s'avoisinent et parfois se touchent, nous acquérons la notion de la *distance*, c'est-à-dire d'un intervalle plus ou moins grand compris entre ces êtres distincts ou entre les parties d'un même être envisagé isolément. Ainsi, nous concevons la distance entre le Soleil et la Terre, entre les deux extrémités d'un navire, entre les limites d'une forêt. Cette notion n'implique nullement que nous sachions mesurer les distances, les exprimer en chiffres, ou même les représenter graphiquement. Elle devance un tel art, elle lui marque son but, mais

elle ne se confond pas avec lui. En Mécanique, il n'est point nécessaire d'obtenir la « dérivée » de la fonction qui relie l'espace parcouru au temps pour se rendre compte qu'il existe un certain élément caractéristique du mouvement, que nous appelons *vitesse;* nous l'évaluerons plus tard, mais, dès maintenant, nous en affirmons la présence. En Géométrie, nous sentons la réalité de la distance avant de connaître les procédés qui la déterminent. Nous savons même, en dehors de ces procédés, ce qu'on doit entendre par distances égales ou inégales.

En effet, supposons deux corps, dont nous négligerons pour le moment les dimensions et que nous réduirons par la pensée à de simples points matériels. Entre ces deux corps plaçons un objet de forme invariable, par exemple un compas entr'ouvert, ou un fil parfaitement tendu. Si l'une des extrémités du compas ou du fil est fixée sur l'un des corps, tandis que l'autre extrémité, coïncidant d'abord avec l'autre corps, se promène ensuite en tous sens, la distance primitive sera constamment conservée, et l'on aura le droit de prétendre que tous les points appartenant à la surface ainsi décrite sont à la même distance du point fixe ou central. Sans approfondir les pro-

priétés de cette surface, appelée *sphère*, nous dirons que les points situés à l'extérieur de la surface sont à une distance plus grande du centre; et que les points situés à l'intérieur sont à une distance moindre. Un tel énoncé sera saisi de tout le monde et ne soulèvera aucune contestation. Il n'implique pas cependant la connaissance de la distance du centre à la surface. Il repose sur un simple fait matériel, à savoir l'invariabilité de l'écart entre les deux extrémités d'un objet solide ou d'un fil tendu.

La distance ainsi comprise est théorique ou absolue. J'entends par là que nul obstacle n'est censé exister entre les deux points et que les circonstances n'obligent pas, pour aller de l'un à l'autre, à suivre un itinéraire particulier. Mais, dans la pratique, il peut en être autrement. Qu'on recherche, par exemple, la distance entre deux points situés sur le globe terrestre. Il est clair que la distance sera comptée sur la surface et non à l'intérieur du globe. Dès lors, le mot n'a plus le même sens et prend une valeur relative. Un troisième point, situé à une distance plus grande sur le chemin assigné, pourra cependant n'être pas extérieur à la sphère qui passe par le

second point : il suffira que le chemin rentre sur lui-même, comme cela a lieu quand on gravit une montagne. Une distance plus grande sur le chemin assigné signifie que le troisième point est rencontré *après* le second ; et une distance moindre signifie qu'il est rencontré *avant*. Mais ceci n'a rien de commun avec le concept géométrique tel que je viens de le rappeler. La distance est toujours envisagée dans l'espace absolu ; aucune circonstance extérieure ne la modifie. Il restera à voir quelle forme elle affecte et comment on la calcule.

VOLUME, SURFACE, LIGNE ET POINT.

Les corps de la Nature, particulièrement les corps solides, sont l'origine des concepts fondamentaux de la Géométrie.

Tout d'abord nous distinguons le *volume*, c'est-à-dire la portion d'espace ou l'étendue occupée par le corps. Pour lui donner une représentation concrète, on peut imaginer que le corps soit remplacé par une enveloppe très mince qui en reproduit exactement la forme extérieure, et alors le volume serait mesuré par la quantité de liquide que cette enveloppe serait susceptible

de contenir. La première abstraction opérée par la Géométrie consiste donc à retirer du corps sa propre matière et à ne laisser subsister que la place qu'elle occupait dans l'espace. A l'inverse de la Mécanique qui, dans les phénomènes de translation, néglige la forme du corps et ne retient que la masse, la Géométrie ignore la masse et ne retient que la forme, qu'elle suppose invariable après la disparition de la matière. Cette abstraction nous paraît très simple, parce que nous y avons été habitués à un âge où d'ordinaire on accepte sans trop les approfondir les bases de l'enseignement. Mais c'est une des plus hardies que l'on puisse faire et elle exige un très grand effort d'imagination. Nous devons retirer d'un corps ce qui le constitue, ce par quoi il existe, et spéculer sur une sorte de fantôme. L'homme éprouverait de la difficulté, à un âge avancé, à se plier à ces méthodes et l'on agit sagement en lui exposant la Géométrie élémentaire dès ses jeunes années.

Le corps étant ainsi amené à l'état de simple volume ou de forme géométrique, nous envisageons son contour extérieur, l'enveloppe idéale qui contient le volume, et nous donnons le nom de *surface* à cette pellicule infiniment mince ou

plutôt à cette apparence de pellicule sous laquelle il nous semble que le corps subsiste toujours. La surface n'a donc rien de matériel, c'est une vision de l'esprit, un « être de raison ». C'est la séparation entre le corps et l'espace qui de toutes parts l'environne. C'est comme l'empreinte que le corps laisserait dans l'espace après en avoir été retiré.

Il est rare qu'un corps soit limité par une surface continue, au moins dans le règne minéral. Presque toujours cette surface est sectionnée et composée de parties distinctes qui se joignent exactement; en un mot, l'enveloppe n'est pas une surface mais une suite de surfaces. La suture de deux d'entre elles a reçu le nom de *ligne*. C'est par un effort plus grand encore que les précédents qu'on parvient à concevoir l'existence de la ligne, à l'isoler des surfaces qui lui donnent naissance. C'est l'abstraction dans l'abstraction. Toutefois cette opération nous devient rapidement familière et le mot de ligne, qui en exprime le résultat, est compris des esprits les moins cultivés. Il est même entré dans le langage courant au point de servir au figuré comme au propre : on dit une « ligne de conduite », comme on dit une ligne de démarcation, la ligne suivie par un

projectile. Cet objet idéal, dont l'imagination fait tous les frais, est figuré à nos yeux par un fil extrêmement ténu, dont l'épaisseur tend à s'évanouir. Mais quelque loin que nous allions dans cette voie de l'atténuation, notre esprit va plus loin encore et perçoit une ligne dont la finesse défie toute réalisation.

Un degré de plus dans l'abstraction et nous créons le *point*, lieu de rencontre de deux lignes, comme la ligne était le lieu de rencontre de deux surfaces. Nous accomplissons ce prodige de voir un être là où tous les éléments de l'être ont disparu. Et cependant je ferai la même remarque que tout à l'heure : cette triple abstraction entre dans nos habitudes jusqu'à passer inaperçue. Aucune hésitation ne subsiste d'ailleurs sur la chose ainsi désignée, tant le concept s'adapte exactement à notre esprit. Quel sujet néanmoins de surprise quand on y arrête son attention ! Faire reposer un concept sur le néant, sur la suppression successive de toutes les conditions de la réalité, et en même temps avoir un tel besoin de ce concept qu'il s'impose à nous dans les occasions les plus décisives ! Nous ne saurions, sans lui, marquer le lieu, la position ; il répond à notre désir de précision et d'unité ; il résume

l'objet dont l'emplacement seul nous intéresse. Au moins autant que la ligne il est entré dans le langage figuré et a reçu les acceptions les plus variées, dans lesquelles il est facile de découvrir la commune origine. Nous nous représentons le point comme un imperceptible grain, qui finit par s'anéantir et qui ne survit que par le souvenir qu'il nous laisse de l'endroit exact où il se trouvait. C'est à ce moment que le géomètre s'en empare pour le faire entrer dans ses combinaisons.

En résumé le corps matériel, tel que nous le livre la Nature, est soumis par nous à trois abstractions consécutives : 1° nous le vidons de sa matière et nous le réduisons à son volume, contenu dans une enveloppe infiniment mince, surface ou assemblage de surfaces ; 2° la suture de deux surfaces est détachée des surfaces elles-mêmes et nous obtenons le fil prodigieusement délié qu'est la ligne ; 3° enfin, nous isolons le lieu de rencontre des deux lignes et nous créons cet être, dépourvu de toute condition d'existence, qu'est le point.

L'idée de matière doit donc désormais être exclue de ces différents concepts. Ce sont des êtres de raison, mais invinciblement liés au corps

lui-même, et qui expriment les particularités sous lesquelles il nous plaît de l'envisager.

La matière étant écartée, nous ne nous embarrassons pas des mille irrégularités, des complications de détail qui la peuvent affecter. C'est ici qu'intervient le travail d'idéalisation auquel j'ai déjà fait allusion. Par cela seul que nous nous représentons l'enveloppe du corps, sa surface extérieure comme quelque chose d'infiniment mince, dont l'épaisseur ne nous intéresse plus, nous ne songeons pas à tenir compte des aspérités, des rugosités sans nombre qui, le plus souvent, la déparent dans la réalité. Nous supposons qu'un polissoir supérieurement délicat les a fait disparaître et a amené la surface à ce degré d'uni et de régulier, dont l'extérieur d'une bulle de savon ou les faces de quelque cristal modèle peuvent nous donner l'idée. Quant aux lignes, intersections de telles surfaces, nous les voyons avec cette finesse et cette pureté parfaite dont approchent les vives arêtes du cristal ou la courbe harmonieuse d'un fil très délié suspendu par ses deux extrémités. Voilà le travail de la raison qu'il ne faut pas confondre avec la source même du concept, dérivée entièrement de l'expérience.

Privés du spectacle de la Nature, nous n'aurions pas imaginé les surfaces et les lignes géométriques.

Certains auteurs adoptent une méthode différente et même inverse pour rattacher ces diverses notions les unes aux autres. Au lieu de procéder du corps pour déduire le volume, la surface, la ligne et le point, ils procèdent, au contraire, du point conçu, *a priori* comme le dernier terme, l'évanouissement d'un objet réel, dont la grosseur a diminué sans cesse. Ce point géométrique devient l'élément générateur, le facteur de tout le reste; de même qu'en Arithmétique l'unité enfante tous les nombres. En se déplaçant dans l'espace, le point occupe une série de positions successives, dont l'ensemble est une ligne nécessairement continue. A son tour, la ligne engendre par son déplacement une surface continue, et enfin la surface, par le même procédé, engendre un volume.

Cette méthode, qui a ses avantages pour l'Analyse pure, me paraît, sous le rapport logique ou simplement pédagogique, offrir un sérieux inconvénient. Certes les êtres géométriques ainsi créés ont bien le degré d'abstraction et de pureté

voulu. Mais le premier de ces êtres, le point, est difficilement conçu d'emblée et de façon directe. Autant il est naturel d'imaginer la surface comme limitation du corps, autant il est artificiel de passer tout d'un coup du corps à ce qui en est la négation, le point. Je crois bien que, si la Géométrie n'existait pas déjà, nul ne songerait à une semblable opération, dont le but échapperait. Le point ainsi posé est beaucoup moins bien perçu par nous que s'il résulte d'un croisement de lignes : tel, par exemple, le sommet d'un cristal bien taillé. J'en dirai autant de la ligne et de la surface. Engendrées par voie de déplacement, elles sont dépourvues de tout support ; elles flottent, pour ainsi dire, dans le vide, au lieu d'être les manifestations d'un corps réel. Nous ne savons à quoi les rattacher et nous n'en avons pas les images. Rien de moins saisissable, au début d'une exposition, que ces lignes et ces surfaces dessinées par un point qui ne laisse pas de trace après lui. Et puis, pourquoi faire intervenir l'idée de mouvement dans une Science qui procède éminemment de l'idée de repos? Que plus tard, quand nous sommes familiarisés avec les notions géométriques, nous recourions à des mouvements fictifs, comme procédés de démons-

tration, rien de plus légitime, parce qu'il n'en résulte aucune altération dans les données fondamentales. Mais qu'on introduise le mouvement à la base, dans les définitions elles-mêmes, cela me semble dangereux et, en tout cas, peu conforme aux règles d'une bonne méthode. La Géométrie doit s'édifier directement, suivant l'idée mère qui l'inspire, celle des rapports des choses stationnées dans l'espace.

FIGURES GÉOMÉTRIQUES.

Le travail d'abstraction, opéré sur les corps réels et qui nous a conduits à en idéaliser les éléments, nous conduit aussi à considérer ces corps comme soustraits à toutes les causes d'ébranlement et de déformation qui agissent sur eux dans la Nature. Pour le géomètre, plus de compression, ni de dilatation ; plus de phénomènes moléculaires; plus d'accidents d'aucun genre. Le corps devient un solide invariable, ou pour parler plus exactement, nous déclarons invariable la forme dont le corps a fourni le spécimen et qui demeure dans notre souvenir après que le corps lui-même a disparu. Ces formes, ces images affinées et perfectionnées des corps, constituent

ce que l'on nomme les *figures géométriques*.

Mais on aperçoit immédiatement combien étroit serait le domaine de la Science, et, en même temps, combien compliqué, s'il se confondait servilement avec la représentation des objets réels. D'une part, ces objets ont souvent des formes fantasques et bizarres, rarement des formes susceptibles d'une expression mathématique. Quelques-uns, comme les cristaux, en approchent, mais ils ne les atteignent pas rigoureusement. La Nature met sur la voie des types géométriques, mais elle ne les fournit pas dans leur pureté. Elle provoque le travail de la raison, elle lui donne la matière première, mais elle ne saurait suppléer à son action. De même que nous avons dû idéaliser les surfaces et les lignes physiques pour en dégager le concept véritable, de même nous devons corriger la forme des objets, parachever en quelque sorte l'œuvre de la Nature, pour aboutir à des figures susceptibles de déductions logiques.

D'autre part, l'esprit humain, en possession des éléments d'un certain nombre de figures et familiarisé désormais avec la façon dont ils se combinent, ne saurait s'arrêter aux types spéciaux qu'il a devant lui. Il est impatient d'élargir

le cadre, d'imaginer des types nouveaux, obtenus par des procédés analogues, jouissant de propriétés différentes, et dont la diversité est inépuisable.

A côté d'une Géométrie pour ainsi dire naturelle, se développe une Géométrie spéculative, qui n'a d'autres limites que celle de notre propre esprit. Ces types créés de toutes pièces sont loin d'être sans utilité. Sans parler de la jouissance très noble qu'ils procurent à l'âme humaine, ils peuvent à leur tour s'adapter à des formes concrètes jusque-là insoupçonnées, ou mettre sur la voie de relations intéressantes qui ont leur répercussion sur des types déjà connus. C'est ainsi que les anciens avaient appliqué leur génie à ces formes abstraites connues sous le nom de *sections coniques* et qui semblaient n'avoir aucun rapport avec la Nature. Plus tard cependant, Kepler, étudiant le mouvement des planètes, reconnut que leurs orbites rentraient dans les mêmes moules; si bien que les géomètres grecs avaient préparé, sans s'en douter, les matériaux de l'Astronomie moderne. De telles rencontres entre l'abstrait et le concret ne sont pas rares et elles montrent avec quelle prudence nous devons juger les recherches qui, au premier

abord, nous paraissent destinées à rester stériles.

Mais, si la Géométrie a pleine licence de s'étendre dans le champ de l'abstrait, elle doit pourtant, sous peine de perdre une part de son intérêt, rester en relation étroite avec le réel. Les profondes théories qui envisagent des espaces à dimensions multiples, à courbures constantes ou variables, peuvent rendre d'éminents services à la Métaphysique et aux Mathématiques, mais elles n'ont pas la portée pratique de la Géométrie ordinaire et ne sauraient la suppléer. Elles n'existeraient même pas sans cette dernière, sans les enseignements que nous fournit l'espace où nous vivons et qui règlent notre conduite. Elles sont comparables à une Mécanique rationnelle, de laquelle serait exclue la loi de Newton ou la loi de Galilée. Les conséquences auxquelles on aboutit ne franchissent pas le domaine du spéculatif, j'oserai dire du conventionnel, puisqu'elles s'adaptent à un ordre de choses qui ne nous apparaît pas comme étant le nôtre.

En résumé donc, les figures géométriques, celles du moins que vise la présente étude, ont pour condition essentielle de satisfaire aux lois naturelles. Soit que ces figures émanent directement de la considération des objets réels, soit

qu'elles aient été créées par le géomètre, elles doivent reposer sur les données de l'expérience. Celles-ci d'ailleurs sont en petit nombre, car, nonobstant l'infinie variété des formes, les éléments premiers qui entrent dans leur composition sont identiques.

LIGNE DROITE.

Le concept de la ligne droite est un des plus anciens et à coup sûr le plus important qu'enregistre la Géométrie.

Il répond à un grand nombre de phénomènes, dont plusieurs de l'ordre le plus familier. Qui n'a tendu un fil entre ses mains ou n'a vu des travailleurs se servir du « fil à plomb »? Qui n'a admiré les arêtes de certains cristaux, soit naturels, soit artificiels? Le règne végétal, sans offrir des lignes droites aussi nettes, nous montre cependant des tiges et des branches qui suffiraient à suggérer l'idée de la forme rectiligne. C'est à dessein que je ne cite pas les spécimens accomplis que nous rencontrons dans le domaine des arts : dus à la main des hommes, ils n'auraient pas vu le jour, si déjà nous n'avions pas eu l'occasion d'en acquérir le type.

Ce concept est d'ailleurs tellement approprié à notre entendement qu'il y prend place dès nos premières observations et devient promptement inséparable de notre faculté de sentir et de raisonner. Aussi sommes-nous enclins à le regarder comme nécessaire et ne se distinguant pas des concepts purement logiques. Nous ramenons tout à la ligne droite, qui est ainsi le commencement et la fin des constructions géométriques les plus diverses. Nous cherchons à la retrouver dans les lignes et les surfaces les plus disparates. Par voie de décomposition successive, nous finissons par l'apercevoir comme résidu et élément premier de toute forme; tandis qu'inversement nous n'imaginons rien de plus simple et de plus clair, à quoi elle-même puisse être ramenée. La décomposition de la ligne droite ne nous procure que des fragments de ligne droite; nous ne concevons pas d'élément ultime d'une autre nature. De là vient que ses propriétés semblent ressortir à la raison pure et qu'au lieu de les vérifier par l'expérience nous sommes tentés de les proclamer évidentes, à l'instar des axiomes mathématiques, ou d'en demander la démonstration à la logique.

Quand nous énumérerons ces propriétés, nous

serons frappés de la peine qu'on s'est donnée pour éviter de recourir à l'observation et pour suppléer au témoignage des sens par des raisonnements, dont la rigueur ne rachète pas la complication. Fussent-ils d'ailleurs, en certains cas, à l'abri de la critique, ce ne serait pas, selon moi, un motif suffisant pour refuser la claire certitude qui résulte de la vue des choses. Dans le domaine des Sciences purement abstraites, il est d'une saine philosophie de ne rien introduire qui ne puisse être rationnellement démontré. Mais, dans les Sciences physiques, où l'expérience établit les bases, il n'y a pas lieu d'en limiter parcimonieusement le nombre. Mieux vaut une donnée expérimentale de plus qu'un détour laborieux, grâce auquel on espère la déduire logiquement de quelque autre vérité, dont la primauté ne s'impose pas.

Nous verrons également qu'on a cherché à faire reposer sur telle ou telle de ces propriétés la définition même de la ligne droite. C'est une méthode, à mon avis, peu satisfaisante, car on ne réussit ainsi qu'à donner une idée incomplète de l'objet défini. On en produit la qualification abstraite, mais on n'en montre pas la forme. Celui qui n'aurait jamais vu de ligne droite, c'est-

à-dire le phénomène physique très simple d'où le concept dérive, ne se la représenterait nullement d'après l'indication de sa propriété caractéristique. Suffit-il d'entendre dire que « la ligne droite est déterminée par deux points » pour avoir immédiatement devant soi l'image d'un fil tendu? Le fait concret ne nous en apprend-il pas davantage ? Tout énoncé métaphysique nous laisse dans une demi-ignorance. Si nous connaissions la chaleur seulement comme vibration de l'éther, nous serions beaucoup moins bien informés qu'après l'avoir éprouvée sur nous-mêmes ou sur les corps qu'elle dilate. Il convient donc que la ligne droite reste dans l'esprit comme l'idéalisation du fil très délié, tendu par ses deux extrémités.

Direction. — L'idée de direction est inséparable de la ligne droite. Souvent même les deux mots sont synonymes. On dit « suivre une direction » pour dire : suivre la ligne droite qui, du point où l'on est, mène vers une région déterminée. Dans plusieurs cas, la direction est appréciée par rapport à une base fixe. Deux lignes droites ont la même direction par rapport à cette base quand elles s'en écartent pareille-

ment, quand elles divergent de la même manière. Ce point se précisera plus tard. On dit aussi, en empruntant le terme au vocabulaire maritime, que les droites ont la même « orientation ». De toutes façons, la direction est marquée par la ligne droite et ne se définit que par elle : c'est le même concept, avec cette nuance que le terme de direction est plus restrictif, il nous montre la ligne droite sous un de ses aspects principaux, en laissant les autres propriétés dans l'ombre.

LIGNE COURBE.

La ligne courbe veut être vue, comme la ligne droite, pour être bien comprise. Les définitions abstraites sont impuissantes à en donner une juste idée. Que reste-t-il dans l'esprit quand on a appris que la ligne courbe est celle qui n'est « ni droite, ni composée de lignes droites »? Outre que cette définition est négative, partant insuffisante, elle n'évoque aucune image, elle ne nous amène à rien de précis. Nous serions aussi embarrassés après qu'avant pour figurer une courbe sur le papier. Si l'on accepte de tels énoncés sans protester, c'est parce qu'on a déjà

acquis par l'expérience la notion de la ligne courbe et qu'on en discerne la forme au moment de la définir. Comme, après tout, cette définition n'est pas erronée, on l'admet et on lui attribue volontiers les clartés dont elle profite. Mais assurément, si la courbe n'avait pas déjà été observée matériellement, ces explications ne nous la feraient pas entrevoir.

On dit aussi que la ligne courbe est une ligne « dont la direction varie continuellement ». Mais quelle direction? puisqu'il n'y a pas de ligne droite et que la droite seule a une direction. Il faudrait préalablement avoir défini la tangente à la courbe et être convenu que la direction de cette tangente représente, en chaque point, la direction de la courbe. Or comment définir la tangente si déjà l'on ne possède pas la notion de la courbe elle-même?

Reconnaissons la vérité, à savoir que le concept de la ligne courbe s'introduit dans notre esprit à la suite des nombreux spécimens que la Nature offre à nos regards. Depuis la courbe harmonieuse de l'Océan jusqu'à la croupe arrondie des montagnes, jusqu'aux myriades de végétaux qui recouvrent le globe, nous voyons sans cesse des lignes dont la forme se diversifie à l'infini et

qui, selon l'expression classique, ne sont « ni droites ni composées de lignes droites ». Telle est la véritable origine du concept. Nous recueillons le type qui se dégage ainsi du concret et, sans nous arrêter aux différences que les spécimens accusent entre eux, nous parvenons à l'idée générale de la courbure. Celle-ci, plus ou moins accentuée, plus ou moins atténuée, selon que la forme s'éloigne plus ou moins de la ligne droite, devient un objet *sui generis* comme la ligne droite l'est de son côté.

Il serait tout aussi chimérique de recourir au mouvement pour se représenter la ligne courbe. Sans doute la pierre lancée par une fronde, la feuille emportée par le vent, le bolide qui traverse le ciel, décrivent des lignes courbes. Mais le phénomène est fugitif et ne laisse pas de trace matérielle. La courbe s'évanouit à mesure qu'elle s'engendre et elle ne saurait parler aux yeux comme le contour d'un objet qui demeure. D'ailleurs, il ne faut pas se le dissimuler, recourir au mouvement, à moins que ce ne soit d'une manière abstraite, c'est encore recourir à l'expérience, c'est entrer, par une autre voie, dans le domaine de l'observation. Et alors, pourquoi ne pas observer directement la forme des objets?

Pourquoi exécuter une opération intermédiaire, qui nous renseigne d'une manière moins simple et moins complète?

La ligne brisée ou polygonale, c'est-à-dire « composée de lignes droites », tout en ne pouvant se confondre avec la ligne courbe, devient un acheminement à celle-ci. Elle n'est pas contraste, mais transition. L'Analyse moderne nous apprend en effet que la ligne courbe peut et doit, pour la facilité des déductions, être considérée comme la limite d'un contour polygonal dont les côtés diminuent indéfiniment ou, selon l'expression métaphorique, comme un polygone à côtés infiniment petits. Il y a donc inconséquence à faire, par définition, de la ligne courbe l'antithèse du contour polygonal.

SURFACE PLANE OU PLAN.

Le plan est la plus simple des surfaces comme la droite est la plus simple des lignes. L'un et l'autre sont irréductibles, tandis que par voie de décomposition successive toutes les autres lignes et toutes les autres surfaces peuvent être ramenées à eux. Notre entendement est ainsi fait que

les éléments de plus en plus petits découpés dans la ligne et dans la surface nous semblent prendre à la fin la forme rectiligne ou plane, tandis qu'en découpant une droite ou un plan nous ne saurions jamais y discerner des éléments curvilignes.

Pour avoir la pleine connaissance du plan il faut, je suis forcé de me répéter, le considérer à l'état concret, les définitions abstraites n'en donnant pas une idée suffisante. L'expérience seule permet au concept de se former avec une entière netteté.

La Nature est fort riche en spécimens. Je citerai, comme s'écartant le moins du plan géométrique et même comme en donnant l'illusion parfaite, la surface d'une eau absolument tranquille. Si l'étendue n'en est pas trop grande le type du vrai plan s'impose à l'esprit. Pour une étendue considérable, à plus forte raison celle de la mer, la courbure devient très appréciable. Mais dans un bassin de jardin, et même dans un petit lac, la forme plane ne subit pas d'altération. Plusieurs cristaux naturels donnent la même impression : les faces de certains échantillons de quartz ou de pyrite sont d'apparence irréprochable. Des schistes, des basaltes peuvent, à

un degré moindre, suggérer le même concept.

La forme plane, par sa simplicité et, en certains cas, par sa commodité, s'est naturellement imposée à l'industrie humaine. Nous sommes entourés d'objets fabriqués sous cette inspiration. Nos cités, nos demeures, nos machines la rappellent de mille façons. Nous sommes parvenus à obtenir sur le marbre, le verre ou l'acier, des surfaces dont la pureté ne le cède en rien à celle de l'eau tranquille. Mais ce sont là des progrès que le génie de l'homme n'eût pas réalisés si déjà le type ne lui était pas devenu familier par l'observation de la Nature ou s'il n'y avait pas été conduit par certains phénomènes matériels, tels que les effets de la pesanteur. Pour maintenir l'équilibre nous sommes amenés progressivement à établir des surfaces planes. Si nous n'avions pas été en contact avec le monde extérieur, si nous savions seulement qu'« un plan peut s'appliquer sur lui-même par voie de retournement », nous aurions sans doute beaucoup de peine à nous le représenter. Ce qui rend l'origine de ces concepts si difficile à démêler, c'est que nous sommes déjà familiarisés avec les objets au moment où l'on entreprend de les décrire. La notion est entrée dans notre esprit avant la for-

mule et la Physique a précédé la Métaphysique.

SURFACE COURBE.

Je reproduirai les réflexions déjà faites au sujet de la ligne courbe. C'est une bien insuffisante définition de dire : « La surface courbe n'est ni plane ni composée de surfaces planes ». L'aperçoit-on dès lors distinctement? Sait-on ce qu'elle est? Non, on sait seulement ce qu'elle n'est pas. L'Analyse infinitésimale vient encore protester contre cette définition. Est-il à propos de proclamer que la surface courbe est celle qui « n'est point composée de surfaces planes », après que Leibnitz nous a persuadés de considérer la surface courbe comme formée de facettes planes indéfiniment décroissantes? N'est-il pas plus philosophique de voir dans le polyèdre un trait d'union entre le plan et la surface courbe?

C'est par une autre voie, par l'observation directe des choses, que nous devons nous élever à ce concept. La Nature, de même que pour les formes précédentes, n'est pas avare de spécimens. La mer, contemplée d'une certaine élévation, nous présente un admirable type de surface

courbe. Dans un ordre plus modeste, les fruits, les fleurs, les cailloux roulés par les eaux affectent toutes sortes de figures arrondies. Chez les êtres animés la surface courbe est la règle; elle varie à tout instant et les parties se soudent les unes aux autres avec un art merveilleux. Le sentiment de la courbure pénètre donc en nous dès notre premier commerce avec le monde extérieur.

Grâce à cette notion générale et aux types spéciaux du plan et de la ligne droite, il nous devient possible, sans observer directement les spécimens, d'imaginer et de définir par des formules abstraites toutes sortes de combinaisons de ces éléments primordiaux. Il n'est pas indispensable, par exemple, de voir un cercle pour le décrire, quoique la vue assurément ne puisse que contribuer à éclairer le concept; mais on en donne une idée très suffisante en disant que c'est « une surface plane entourée par une ligne dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur nommé centre ». La connaissance expérimentale que nous avons acquise du plan, de la droite et de la courbure nous met à même de concevoir le cercle d'après cette seule description. Il en sera de même de toute autre courbe ou de toute autre surface. Il suffira que la propriété

caractéristique ou le mode de génération soit nettement indiqué, de manière à prévenir toute confusion. Lors donc que nous avançons que l'expérience est nécessaire à la Géométrie, nous n'entendons pas qu'elle est nécessaire pour chacun de ses objets en particulier, mais bien qu'elle préside à la formation d'un petit nombre de concepts, desquels on passe ensuite, par voie logique, aux diverses figures géométriques.

Quelques-unes de ces figures d'ailleurs, à raison de leur importance et de la facilité avec laquelle l'esprit se les approprie, méritent également le titre de concepts.

ANGLE.

On nomme angle la figure formée par la rencontre de deux lignes droites. Le sommet de l'angle est le point de rencontre des droites, et les côtés sont ces droites elles-mêmes envisagées à partir du sommet.

Cette figure si simple est, par suite de sa simplicité même, impossible à définir d'une manière plus précise. Toutes les tentatives faites à cet égard prêtent à la critique. Ainsi l'on dit fréquemment que l'angle est « l'espace compris

entre deux droites qui se coupent ». Mais qui ne sent que le terme d'angle éveille en nous une autre idée que celle de surface? car l'angle n'est pas limité par la longueur des côtés. C'est bien plutôt une idée d'ouverture ou d'écartement. On dit aussi que l'angle est « l'inclinaison mutuelle de deux droites ». Mais c'est là une véritable tautologie, car l'inclinaison n'est pas plus définie que l'angle, et au fond le sens est le même. Mieux vaut avouer notre impuissance : l'angle est un objet *sui generis*, comme la courbure ou la vitesse; il n'a pas de synonyme, il porte en soi sa signification. En employant le mot, on est sûr d'être entendu de tous, aussi bien qu'en parlant d'espace, de temps, de direction ou de longueur.

Mais si l'angle n'est pas susceptible de description verbale, il n'en représente pas moins une quantité fort nette, sur le sort de laquelle nous n'avons pas la moindre hésitation. Nous comprenons parfaitement qu'il y ait des angles égaux et des angles inégaux. Nous les faisons même surgir, sous nos yeux, par la rotation d'un des côtés de l'angle autour de son sommet. L'angle grandit graduellement et il arrive un moment ou nous sentons qu'il est égal à celui que

le même côté mobile forme avec le prolongement du côté fixe. Ce qui est vrai d'un angle particulier, qu'on fait ainsi croître et décroître, est vrai de tous les angles possibles; ils passent tous par les mêmes nuances de grandeur, de sorte qu'on est en droit de les considérer comme étant de même nature et comparables entre eux. En un mot, tous les angles possibles rentrent dans la série qu'on obtient par la rotation d'un côté, d'abord appliqué sur l'autre côté, et qui accomplit ensuite un tour entier pour revenir à son point de départ.

La position unique du côté mobile, qui correspond à l'égalité des deux angles formés avec le côté fixe et avec son prolongement, mérite d'être distinguée de toutes les autres et a reçu, à cet effet, une dénomination spéciale. Les deux droites sont dites perpendiculaires entre elles et les angles égaux sont appelés droits. Si le côté mobile est prolongé comme le côté fixe, le champ entier est partagé en quatre angles droits. Il tombe sous le sens qu'une autre figure donnerait quatre angles égaux aux précédents et que, d'une manière générale, tous les angles droits sont égaux entre eux, en quelque partie de l'espace qu'ils soient tracés. Chacun représente

un quart du tour entier et embrasse le quart du champ occupé par les deux droites. Les angles plus petits que les droits sont *aigus*, les angles plus grands sont *obtus*.

J'anticipe ici forcément sur les propriétés de la ligne droite et du plan. Car il n'est pas évident *a priori* qu'une droite peut tourner autour d'une autre, de manière à s'appliquer exactement sur elle à un certain moment de la rotation. Elle coïncidait au début, mais rien ne prouve qu'après un demi-tour elle coïncidera avec le prolongement. Du moins rien ne le prouve, quand on n'est pas encore renseigné sur la manière d'être de la droite et du plan ([1]). Mais cette anticipation de ma part n'est pas, comme on le verra, une pétition de principe.

La notion de la perpendicularité, malgré son extrême importance, n'est pas un concept proprement dit : elle se confond avec celle de l'angle droit, et celle-ci, à son tour, est comprise dans le

---

([1]) Certains géomètres qui refusent de remonter à la source expérimentale et qui ne trouvent pas évident en soi (en quoi ils ont raison) qu'une pareille coïncidence doive nécessairement avoir lieu, prennent le parti de la contester et alors ils construisent une science singulière, qui peut intéresser par quelques-uns de ses résultats inattendus, mais qui n'a avec la Géométrie ordinaire que des rapports bien lointains.

concept général de l'angle. Entre la ligne droite et la ligne courbe, ou entre le plan et la surface courbe, il existe une différence de nature; aussi les concepts sont distincts. Au contraire, entre l'angle droit et un angle quelconque, il n'y a qu'une différence de grandeur; il n'y a pas de différence de nature; aussi le concept est unique. L'attention se porte de préférence sur ce moment précis de la grandeur où la perpendicularité se déclare, parce que notre esprit est amoureux de symétrie, d'équilibre, d'égalité, et parce que, d'autre part, les conséquences pratiques sont considérables. En premier lieu la pesanteur, qui agit perpendiculairement à la surface de la Terre, nous oblige, si nous voulons assurer la stabilité de nos constructions, à les élever perpendiculairement à la surface d'équilibre de l'eau, ou suivant la verticale. Dans nombre de circonstances, indépendamment du plaisir des yeux, nous recherchons, pour des motifs de facile agencement ou de plus grande résistance, la disposition orthogonale, qui est toujours la plus favorable. L'expérience nous apprend, en effet, que la réaction la plus efficace des surfaces contre lesquelles on appuie s'exerce normalement ou dans une direction perpendiculaire à la

surface. Si donc on désire éviter le glissement, on a intérêt à diriger la pression selon la normale et à créer, par conséquent, des angles droits.

Enfin, les positions des objets dans l'espace sont presque toujours déterminées à l'aide de droites ou axes fixes, auxquels ces positions sont rapportées. On a été naturellement amené, parce que le système est plus simple, à rendre ces axes perpendiculaires les uns aux autres. De sorte que dans la Science, comme dans l'industrie, les angles droits sont d'un usage continuel et d'une utilité de premier ordre.

L'idée d'angle est si bien distincte de celle d'étendue qu'elle a donné naissance à plusieurs locutions d'où l'idée d'étendue est absente. C'est ainsi qu'en Mécanique on considère la vitesse *angulaire* par opposition à la vitesse ordinaire ou linéaire. Or la vitesse angulaire, qui désigne le degré de rapidité avec lequel la rotation se poursuit, ne comporte aucune notion de longueur ou de surface; car cette vitesse est la même, quelle que soit la distance au centre de rotation. Quand on fait tourner un côté de l'angle autour du sommet, tous les points de la droite mobile possèdent la même vitesse angu-

laire et cependant ils enserrent, par leur trajectoire, des surfaces fort inégales, suivant leur éloignement du sommet. L'idée d'étendue doit donc être éliminée du concept de l'angle ; ce qui reste, c'est la notion de divergence ou d'écartement, ou, si l'on préfère, d'ouverture sur l'espace indéfini.

L'angle de deux plans ne présente pas une image moins nette. Sans connaître le mode d'évaluation ni les procédés graphiques à employer, nous sentons que la méthode sera la même pour tous les angles de deux plans, et que la mesure d'un angle ne variera pas quel que soit le point de l'arête ou de la ligne d'intersection qui aura été choisi. Nous sentons également qu'il ne s'agit pas ici d'un concept nouveau et que l'ouverture de deux plans ne diffère pas, au point de vue métaphysique, de l'ouverture de deux lignes droites.

Si l'angle évoque une idée tout autre que celle d'espace, il n'en est pas moins vrai que le plan et l'angle sont étroitement liés, en vertu de ce fait que tout angle appartient à un plan [1] et que

[1] J'anticipe encore sur les propriétés du plan, mais la rigueur de l'exposition n'aura pas à en souffrir.

nous ne saurions tracer un angle sans faire naître aussitôt l'idée d'un plan auquel il adhère. Cette figure géométrique si simple, la première de toutes, est donc essentiellement une figure plane, et par là elle se distingue de la multitude innombrable de celles qui, par suite de leur structure, ne peuvent pas être contenues dans un même plan.

De même que l'angle est une figure plane, la figure formée par une droite et un point extérieur à cette droite est également une figure plane. Car on peut toujours joindre ce point à la droite par une droite quelconque, c'est-à-dire former un angle contenu, par conséquent, dans un plan. D'où cette constatation, qu'une droite et un point sont toujours situés dans le même plan. On peut remarquer que le phénomène de la perpendicularité se réalise aussi bien quand le point est extérieur à la droite que s'il lui appartient. Car la droite quelconque, menée du point à la droite donnée, peut tourner autour du point jusqu'à ce que les deux angles formés avec celle-ci soient égaux.

PARALLÉLISME.

La notion du parallélisme, bien que contemporaine sans doute de celle de l'angle, n'est pas acceptée avec la même unanimité. Elle a fourni l'occasion de nombreuses controverses qui ne sont pas encore closes. Cette confusion relative tient, selon moi, à ce qu'on veut se passer du concours de l'expérience et aussi à ce qu'on se place à un point de vue qui n'est peut-être pas très philosophique.

Au lieu de considérer le parallélisme en lui-même, comme un phénomène spécial, ne se rattachant à aucun autre, on en fait le dernier terme d'une série, le membre éloigné d'une famille à laquelle il n'appartient pas réellement. Pour montrer la filiation, on raisonne ainsi :

« Deux droites se coupent ou font un angle. Imaginons que l'une d'elles tourne autour d'un de ses points de manière à reculer de plus en plus le point de rencontre. L'angle diminue en même temps et il arrivera un moment où le point de rencontre étant rejeté à l'infini, cet angle deviendra nul. Dans cette situation, les droites sont parallèles. »

Remarquons combien cette définition est obscure et même inexacte. Qu'est-ce qu'un point de rencontre situé à l'infini? Ou les deux droites se coupent, ou elles ne se coupent pas. Si elles se coupent, le point de rencontre est quelque part, très loin, plus loin encore, mais il est quelque part. Il n'est pas à l'infini, car cela n'a pas de sens : l'infinité ne se réalise pas dans les phénomènes. Si au contraire les droites ne se coupent pas, il n'est pas plus vrai de dire qu'elles se rencontrent à l'infini qu'à une distance quelconque. Elles ne se rencontrent pas, et c'est tout. De même pour l'angle. Ou il existe, ou il n'existe pas. S'il existe, le sommet est quelque part, si loin qu'on veut, mais quelque part. S'il n'existe pas, le sommet n'est nulle part, pas plus à l'infini qu'à une distance finie.

Il ne faut pas confondre une méthode de calcul, un procédé d'évaluation avec une définition, c'est-à-dire avec la description d'un être pris en soi, tel que ses attributs propres le font connaître. Sans doute l'Analyse infinitésimale nous convie, pour faciliter le calcul, la mesure, à envisager une courbe comme la limite d'un polygone à côtés décroissants, mais nous n'avons pas le droit de dire qu'une courbe *est* un polygone

d'un nombre infini de côtés. Car au moment où nous prononçons les mots de polygone et de côté nous excluons la courbe. Celle-ci est un objet *sui generis*, substantiellement distinct des polygones. Quand nous employons de semblables locutions, c'est abréviativement, pour éviter des périphrases. Mais le vrai géomètre ne s'y trompe pas : il sait que les courbes ne sont pas des polygones : ce sont deux genres différents. Tout ce qu'on a droit de prétendre, c'est que ces genres peuvent être rapprochés autant qu'on veut, sans toutefois arriver à se confondre.

Il en est de même pour le parallélisme. Les parallèles ne sont pas des sécantes. La différence entre elles peut être atténuée, mais elle n'est jamais nulle. Il faut donc renoncer à ranger sous un même concept deux phénomènes qui au fond s'excluent : la rencontre et la non-rencontre. A des phénomènes distincts et qui ne peuvent être ramenés l'un à l'autre, il faut deux concepts distincts : l'angle, d'une part, ou l'intersection des lignes ; le parallélisme, d'autre part.

Je signalerai comme également vicieuse une autre définition, qui a pour elle le prestige d'une longue tradition. Elle consiste à appeler paral-

lèles deux droites qui, étant situées dans le même plan, « ne se rencontrent pas, aussi loin qu'on les prolonge ». Mais peuvent-elles se rapprocher, sans parvenir cependant à se toucher? La définition ne le dit pas. On sait pourtant qu'il existe des lignes nommées *asymptotes* qui se rapprochent indéfiniment et qui ne se touchent jamais. A la vérité ces lignes ne sont pas droites, au moins l'une d'elles. La définition suppose donc qu'on sache faire le départ entre les lignes susceptibles d'un tel rapprochement et celles qui ne le sont pas. Grave défaut pour des préliminaires. La définition ne dit pas non plus si les parallèles peuvent s'éloigner l'une de l'autre, ce qui est encore une fâcheuse lacune. Or, représentons-nous deux lignes affectant la forme d'arcs de cercle de très grand rayon, disposés symétriquement. Ces lignes ressemblent à s'y méprendre à des droites, et elles seraient parallèles, aux termes de la définition, car elles ne peuvent se rencontrer; mais elles s'écartent insensiblement l'une de l'autre, si les arcs sont opposés par leur convexité. Enfin la définition est négative, signe d'infériorité. Comment d'ailleurs réaliser physiquement le phénomène de deux droites qui « ne se rencontrent jamais »? Comment vérifier qu'au

delà des étendues qui nous sont accessibles, des droites, d'aspect parallèle jusque-là, ne finiront pas par se rejoindre? Quand sera-t-on sûr d'avoir atteint le vrai type, d'avoir construit cette figure idéale?

Ces difficultés viennent de ce que nous n'exprimons pas exactement le concept que nous avons dans l'esprit. Nous nous éloignons du sentiment naturel, tel que l'éprouvent le commun des hommes. Qu'on demande à une personne peu familiarisée avec les spéculations géométriques et qui en connaît seulement les idées générales, qu'on lui demande de tracer deux parallèles. Elle n'aura pas d'hésitation. Après avoir décrit une première droite, elle s'appliquera, si elle n'a à sa disposition qu'une règle, à placer celle-ci de manière qu'elle ne penche ni d'un côté ni de l'autre, ou que, sur sa longueur, elle lui paraisse à la même distance de la droite déjà tracée. Pour cette personne deux parallèles se reconnaissent à ce signe qu' « elles sont partout à la même distance l'une de l'autre ». Tel est, à mon avis, le vrai concept du parallélisme. Telle est la formule à laquelle je me rallie. Il restera, bien entendu, à montrer que de telles droites sont toujours possibles. Il y aura lieu

aussi de préciser l'idée de distance qui se présente ici naturellement.

Cette définition, outre sa clarté et sa précision, a une supériorité sur les deux autres. Le parallélisme ainsi dépeint est susceptible d'une vérification expérimentale, tandis que sous les autres formes il ne l'est pas. Voici en effet deux droites menées dans un plan et qualifiées de parallèles. Comment nous assurer qu'elles le sont? Aux termes de la première définition, le point de rencontre est transporté à l'infini. Il est bien évident que nous n'avons aucun moyen de le constater. Aux termes de la seconde définition, les deux droites ne devront se rencontrer jamais. Nous n'avons pas davantage le moyen de le savoir. Quand même nous observerions un léger rapprochement, nous n'en pourrions pas conclure qu'une intersection s'ensuivra, et, d'autre part, ce rapprochement n'est pas contraire à la définition.

En résumé, pour vérifier le parallélisme selon les deux premières formules, il faudrait étendre notre cadre indéfiniment, que dis-je? il faudrait l'étendre à l'infini, ce qui est vain. Au contraire, d'après la dernière définition, il suffit de rechercher s'il existe un rapprochement. Si faible qu'il

soit, il exclut le parallélisme. Pas n'est besoin de sortir du cadre fini de la figure.

Nous verrons plus tard quelles interprétations ont permises les définitions en usage et combien l'idée de l'infini ainsi introduite à l'improviste a été la source de malentendus. Elle constitue, dans la Géométrie élémentaire, une exception peu explicable. Toutes les autres figures, l'angle, la ligne droite, la courbe, le plan, sont perçues par nous dans une étendue limitée. Nous admettons qu'elles puissent être prolongées indéfiniment, mais cela n'est point nécessaire à leur compréhension. Nous relevons leurs propriétés dans le fini. Tout à coup la méthode change sur les parallèles. Leur existence implique l'infini. Aucune observation dans le fini n'est probante. Il y a là une anomalie singulière et une brusque rupture dans l'enchaînement des idées. Pourquoi ne pas rester dans les données habituelles? Pourquoi ne pas caractériser le parallélisme par une propriété perceptible dans le domaine limité? Or justement l'égalité de distance satisfait à cette condition.

Du parallélisme de deux droites on passe aisément, sans sortir du concept, au parallélisme de deux plans. Leur distance doit rester constante.

Pareillement, une droite est dite parallèle à un plan quand elle est partout à la même distance. On peut enfin envisager autant de plans qu'on voudra, parallèles les uns aux autres, et de même un nombre quelconque de droites parallèles entre elles. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire qu'elles soient toutes situées dans le même plan; il suffit qu'elles soient, deux à deux, dans un plan.

Quand deux droites ne sont pas dans un même plan, forcément elles ne se rencontrent pas; car si elles se rencontraient, elles formeraient un angle, donc un plan. Et cela nous montre encore un point faible de l'ancienne définition du parallélisme; en effet, ces droites satisfont à une partie de la définition, qui consiste dans la non-rencontre. Le point faible disparaît si les parallèles sont définies « des droites qui restent à la même distance ». Car les droites non situées dans le même plan, tout en ne se rencontrant pas, ne gardent pas la même distance: elles n'ont rien de commun avec les parallèles.

CERCLE, SPHÈRE.

Le cercle et la sphère, bien qu'étant des figures particulières, comme le triangle, le qua-

drilatère, et plus tard l'ellipse, l'hyperbole, etc., me paraissent devoir être érigés en concepts, à raison du rôle prééminent qu'ils jouent dans le monde physique et dans la Science, à raison aussi de la connaissance précoce que nous en avons. En outre, ils possèdent des propriétés communes avec la ligne droite et le plan, ce qui les distingue des autres figures et ce qui a permis d'édifier sur eux une Géométrie comparable, par certains côtés, à celle des figures rectilignes planes.

La sphère est le lieu des points situés à une égale distance d'un point fixe. Ce point fixe est dénommé le centre de la surface sphérique. Le cercle est le lieu des points analogues situés dans un même plan. Cette définition est non seulement claire et précise, mais elle permet de se représenter l'objet. Il n'est point indispensable d'avoir vu une sphère ou un cercle pour s'en faire une idée; il suffit de concevoir le procédé de génération mis en œuvre, c'est-à-dire de concevoir, pour le cercle, une branche d'un compas tournant autour de l'autre branche et réalisant par suite l'égalité de distance. La conception de la sphère à l'aide du même procédé est un peu moins simple, mais on y arrive aussi avec quelque effort d'attention.

L'intersection de la sphère par un plan passant par le centre est évidemment un cercle; car tous les points de la ligne d'intersection sont, comme tous les autres points de la sphère, à égale distance du centre, et, d'autre part, ils sont, par hypothèse, contenus dans un plan. Tous les cercles ainsi découpés sur la sphère par des plans affectant des directions quelconques sont égaux; car en faisant tourner convenablement la sphère autour de son centre, on peut toujours amener l'un quelconque de ces cercles à coïncider avec un autre supposé fixe ou rendu indépendant, par la pensée, de ce mouvement de rotation. Dès lors, on peut concevoir la sphère comme obtenue par la rotation d'un quelconque de ces cercles autour de son centre ou encore par la rotation du cercle autour d'une droite contenue dans son plan et passant par le centre.

La manière même dont le cercle ou la sphère sont tracés, en vertu de la définition, a pour conséquence que le cercle et la sphère sont partout semblables à eux-mêmes. Une portion quelconque, soit du cercle soit de la sphère, peut être amenée, par une rotation de la figure, à coïncider avec une autre portion, supposée fixe. C'est là une propriété très remarquable, que le

cercle et la sphère partagent avec la ligne droite et le plan, et qui ne se retrouve dans aucune autre figure. La courbure, quelle que soit d'ailleurs la manière de la mesurer, est identique en tous les points d'un même cercle ou d'une même sphère. D'une façon générale, toutes les propriétés de la courbe ou de la surface, existant en un point, existent sur tous les autres points. On pourrait citer d'autres particularités qui découlent immédiatement de la définition, mais j'ai voulu me borner à donner une idée de ces figures exceptionnellement intéressantes.

Elles représentent avec une grande approximation la forme du Soleil, des planètes et de leurs satellites, probablement aussi celle de toutes les étoiles. La courbure de l'Océan, dans le sens équatorial, réalise un cercle presque mathématique. La forme sphérique ou tout au moins sphéroïdale se retrouve dans un nombre immense de phénomènes. Les radiations calorifiques, lumineuses se propagent en affectant la même intensité sur toute la surface de la sphère dont la source radiante est le centre. La gravitation universelle se fait sentir en raison inverse du carré de la distance ou en raison inverse de la surface sphérique. L'ébranlement causé dans un

liquide par la chute d'un corps se manifeste par des cercles concentriques qui vont s'élargissant à partir du point de la chute. Dans les phénomènes de dimensions plus réduites, dans la goutte d'eau qui se condense, dans la bulle de savon qui s'élève, la figure sphérique est toujours plus ou moins observée. L'industrie s'applique, dans les cas les plus divers, à réaliser des cercles aussi parfaits que possible, pour faciliter les mouvements de rotation dont elle a besoin. Les volants des machines, les roues des véhicules, les rouages de montre sont autant d'applications de la forme circulaire. Il n'est pas surprenant que le cercle et la sphère aient pris, dès les premiers temps, une place aussi grande dans la Géométrie.

La notion du cercle contribue à éclaircir celle de l'angle. Si l'on prend, en effet, le sommet de l'angle pour centre d'un cercle, un des côtés de l'angle, en tournant autour du sommet, parcourra successivement toute l'étendue du cercle. Les dimensions de l'angle, aux différents stades de la rotation, correspondront aux dimensions de l'arc intercepté. Et si l'on adopte un cercle de même rayon pour tous les angles, ceux-ci

seront comparables entre eux comme sont comparables les arcs qu'ils interceptent.

TANGENCE.

Le concept de la tangence a pris naissance à l'occasion du cercle et de la sphère; il s'est ensuite étendu à toutes les courbes et à toutes les surfaces. On entend par ce mot la disposition d'après laquelle une ligne droite et une courbe, une surface plane et une surface courbe, ou bien deux courbes ou deux surfaces courbes, n'ont entre elles qu'un simple contact, ne se touchent que par un seul point.

Observons d'abord cette particularité sur la ligne droite et la courbe. Nous en avons un spécimen matériel sous les yeux chaque fois qu'un disque circulaire, la roue d'un véhicule, par exemple, roule sur une bande en bois ou en fer. Le transport des voitures sur rails, aujourd'hui si répandu, est une continuelle application de la tangence. De tels faits suffisent à suggérer le concept. Mais il convient d'épurer le phénomène et de le voir en sa forme idéale.

La droite et la courbe étant deux genres différents, dont l'un exclut l'autre, elles ne

peuvent avoir une partie finie commune. Quelle que soit donc la manière dont elles viennent à se rencontrer, elles ne peuvent avoir à ce moment qu'un point commun. Mais les effets de la rencontre sont très différents, selon que la droite passe au travers de la courbe, la pénètre, ou selon, au contraire, qu'elle l'effleure sans la percer, ainsi que nous voyons le rail servir d'appui à la roue. C'est ce second cas, celui du contact géométrique, qui s'appelle *tangence*. On peut le réaliser par un double procédé : soit en traçant une droite extérieure et la rapprochant ensuite graduellement de la courbe jusqu'au moment précis où elle la touche sans l'entamer; soit en coupant tout d'abord la courbe et faisant ensuite pivoter la droite autour d'un des points d'intersection jusqu'à ce que l'autre point vienne à la fin se confondre avec lui. Si peu que la rotation continue, les deux points se séparent et le second reparaît, mais du côté opposé. L'instant indivisible où les deux points n'en font qu'un marque le phénomène de la tangence.

Les géomètres préfèrent ce second mode, qui se prête mieux à l'application du calcul. Dès lors, la ligne droite tangente, ou plus brièvement la

tangente, est désignée comme étant la limite des sécantes, c'est-à-dire comme la position unique par laquelle passent les sécantes lorsque, ayant eu un deuxième point d'intersection, par exemple, à droite, elles l'auront ensuite à gauche. Mais, de ce que la tangente est la limite, il n'en faut pas déduire, comme on le fait souvent à tort, qu'elle est « un cas particulier des sécantes » ou « la dernière des sécantes ». Non, car en passant par cette position spéciale et unique, elle change de nature : elle sort de la famille des sécantes pour entrer dans celle des tangentes. Nous retrouvons ici la même confusion que nous avons déjà signalée au sujet du parallélisme. De même que la parallèle n'est pas un cas particulier des obliques, mais la limite vers laquelle celles-ci tendent quand l'angle diminue, de même la tangente ne saurait être une forme de sécante : elle en est la négation.

J'ai supposé implicitement que la droite ne coupait la courbe qu'en deux points. On peut en effet envisager une partie de courbe assez petite pour que le nombre des points d'intersection soit en général réduit à deux. Cela, du reste, n'importe pas au concept,

La sphère et le plan sont, au regard l'un de l'autre, dans la même situation que le cercle et

la ligne droite. La vue d'une bille qui roule sur une table de marbre ou sur une glace nous donne la notion d'un plan tangent à une sphère, c'est-à-dire n'ayant avec elle qu'un point commun.

On précise géométriquement cette notion en imaginant, comme tout à l'heure, que le plan commence par couper la sphère, puis qu'on l'éloigne peu à peu du centre ou qu'on le fait tourner autour d'un des points de rencontre, de manière que la ligne d'intersection se rétrécisse insensiblement et finisse par se réduire à un point unique. A ce moment, le plan est dit tangent à la sphère. Sans plus de difficulté, on imagine un plan tangent à une surface quelconque, et deux surfaces tangentes entre elles.

Le concept de la tangence est aussi naturel et aussi répandu que celui du parallélisme. Tout le monde n'est sans doute pas familiarisé avec le mot, mais bien peu de gens ignorent la chose, et quand on parle de deux lignes ou de deux surfaces qui se *touchent*, qui n'ont qu'un point de contact, personne ne se méprend sur la nature du phénomène, personne ne le confond avec celui d'une ligne qui en rencontre une autre, et qui passe du dedans au dehors. Il n'est pas nécessaire d'être géomètre pour avoir l'esprit ouvert à ces

notions : elles relèvent, oserai-je dire, du sens commun.

LIMITES.

La notion des limites n'est pas spéciale à la Géométrie. Elle se retrouve dans les diverses branches des Mathématiques et, sous une forme parfois voilée, elle est l'idée maîtresse de l'Analyse infinitésimale. Mais son rôle dans la Géométrie est tellement considérable qu'il convient de la mentionner avec quelques détails.

Le mot de *limite* prête à l'équivoque. Dans le langage ordinaire, il désigne une barrière qui ne doit pas être franchie, mais qui peut être atteinte ; c'est dans ce sens qu'on parle de la limite d'un champ, d'un pays, des limites d'un pouvoir, d'une autorité. C'est une sorte de frontière jusqu'à laquelle, à la rigueur, on peut aller, à la condition de s'y tenir strictement. Les géomètres ont créé un nouveau sens. Pour eux la limite est un confin auquel on ne peut pas accéder complètement ; on en approche sans cesse, de plus en plus, mais on ne l'atteint jamais. Nous en avons vu deux exemples marquants, dans le parallélisme et dans la tangence. La sécante qui tend à devenir

soit parallèle, soit tangente, ne le devient à aucun moment. La position dont elle approche appartient à une ligne d'espèce différente. Elle ne peut se confondre avec elle, sous peine de changer de nature; elle en diffère aussi peu qu'on veut, mais elle en diffère toujours.

Si l'on n'est pas très net dans ces prémisses, on s'expose à beaucoup d'erreurs par la suite. Il faut éviter les locutions qui tendent à donner le change et à faire oublier la démarcation infranchissable qui existe et qui ne doit pas cesser d'exister entre la variable et sa limite.

La considération des limites peut être introduite avec fruit dans un grand nombre de phénomènes géométriques; elle facilite singulièrement des solutions qui se dérobaient aux anciennes méthodes. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer, et c'est là un point capital entre tous, qu'une courbe peut être envisagée comme la limite vers laquelle tendent les polygones, soit inscrits, soit circonscrits, dont les côtés diminuent indéfiniment [1]. On aperçoit tout le parti qu'il est permis de tirer de ce grand principe. La mesure de

[1] Cette proposition est susceptible d'une démonstration rigoureuse. On prouve, d'une part, que la longueur de la courbe est comprise entre les longueurs des périmètres

l'aire d'une courbe pourra être ramenée à la mesure de l'aire d'un polygone, et la mesure de l'arc, de son côté, sera ramenée à la mesure d'un périmètre. Pour prendre l'exemple le plus simple, celui d'un cercle et des polygones réguliers appuyés contre sa circonférence, la mesure de ces derniers, très facile à obtenir par des procédés élémentaires, procurera celle du cercle. D'une manière générale, toutes les fois qu'une courbe ou une surface seront exprimées par des équations algébriques, le calcul du périmètre de l'aire ou du volume se réduira, grâce au principe des limites, à des opérations d'*intégration*. De même pour le phénomène de la tangence. Il est clair, d'après ce que nous avons déjà dit, que la tangente à une courbe est la limite d'un côté de polygone inscrit, puisque, ce côté diminuant, les deux points d'intersection tendent à se confondre en un seul. Si donc l'Analyse algébrique permet de calculer la direction de ce côté, il sera possible de connaître la direction de la tangente.

Je ferai une dernière remarque qui se rattache

---

inscrit et circonscrit, et, d'autre part, que la différence entre ces derniers peut être rendue moindre que toute quantité donnée.

au concept de la courbure et qui en éclaire la signification.

Par un point d'une courbe, on peut imaginer une infinité de cercles tangents à la courbe ou ayant avec elle une tangente commune. Ces cercles ont tous leur centre sur la normale à la courbe, c'est-à-dire sur la droite menée perpendiculairement à la tangente, par le point de contact. Parmi eux, il en est un dont le contact est particulièrement intime ou qui tend davantage à se confondre avec la courbe aux environs du point de contact. Pour ce motif on le considère avec raison comme étant l'expression du degré de courbure de la ligne et on le nomme *cercle de courbure;* son rayon est le rayon de courbure de la ligne et sa longueur est la mesure de la courbure. L'Analyse infinitésimale donne le moyen de la calculer et, par conséquent, jette un grand jour sur la notion un peu vague que nous avons tout d'abord du phénomène de la courbure.

La conception des limites a subi une transformation féconde, qu'il faut interpréter sainement si l'on ne veut pas aller au-devant de sérieux mécomptes. Les courbes, par exemple, étant les limites de polygones à côtés décroissants, sont

considérées comme composées, à la fin, de droites imperceptibles ou, selon l'expression consacrée, d'*éléments* rectilignes. Dès lors, la tangente a un élément commun avec la courbe. Deux courbes tangentes ont un élément commun entre elles et avec la tangente. Le cercle est composé d'une infinité de triangles ayant leur sommet au centre et dont la base est un élément de la circonférence. L'erreur que cette assimilation entraînerait, si les éléments étaient finis, disparaît quand on passe à la limite ou que les éléments tombent au-dessous de toute grandeur assignable. Mais on ne doit pas perdre de vue que des locutions comme celle-ci : « la courbe est formée d'éléments rectilignes », ne sont qu'une manière abréviative de présenter le concept des limites; elles ne sauraient changer le fond des choses. La courbe ne se résout pas réellement en lignes droites, si petites qu'on les imagine; elle est, je l'ai dit souvent, d'une nature autre que la ligne droite, et reste toujours différente. Mais l'intervalle qui les sépare peut être atténué indéfiniment.

J'ai énuméré les principaux concepts de la Géométrie. On pourrait en citer d'autres, mais ils

me paraissent moins essentiels, moins immédiats et sont plutôt, à mon avis, des produits de la Science que des données fondamentales. Les vrais concepts correspondent à des notions générales, auxquelles la plupart des hommes ont l'esprit ouvert. Ces notions ont sans doute besoin d'être éclaircies et précisées, mais elles ont leur origine dans l'expérience universelle.

— —

CHAPITRE II.

AXIOMES GÉOMÉTRIQUES OU PROPRIÉTÉS DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

Les auteurs, depuis Euclide, ont continué de désigner sous le nom générique d'*axiomes* un certain nombre de vérités indémontrables par le raisonnement, qui sont continuellement invoquées au cours des démonstrations géométriques. Ces axiomes rentrent dans deux catégories fort différentes. Les uns sont d'ordre purement logique et n'appartiennent pas en propre à la Géométrie; ils trouvent leur emploi dans toutes les Sciences. Telles sont les évidences : « Le tout est plus grand que la partie »; « Deux quantités égales à une troisième sont

égales entre elles »: « Deux quantités égales peuvent être augmentées ou diminuées de la même quantité sans cesser d'être égales ». La liste pourrait être allongée au delà même des bornes qu'elle reçoit dans les Traités; car ceux-ci sont loin d'énumérer toutes les vérités de cette nature sur lesquelles on a l'occasion de s'appuyer. Beaucoup d'entre elles sont admises implicitement et ne soulèvent aucune difficulté. Je ne m'occuperai pas de cette première catégorie d'axiomes, étrangers par leur origine à la Géométrie.

Les axiomes de la deuxième catégorie, au contraire, sont spéciaux à cette Science et, comme elle, prennent leur source dans l'expérience. C'est par l'observation du monde extérieur qu'on en a acquis la connaissance. La logique est impuissante à les établir. Les essais dans cette voie aboutissent invariablement à quelque pétition de principe. On trouvera cependant, dans la liste qui suit, un axiome susceptible d'une démonstration rationnelle, c'est-à-dire susceptible d'être rattaché à d'autres axiomes ou aux théorèmes qui en découlent. Mais le détour est très pénible, et le raisonnement est si compliqué qu'il me paraît tout à fait choquant de le faire figurer

dans des préliminaires qui doivent s'imposer par leur simplicité et leur clarté. Je n'ai donc pas hésité à appuyer cet axiome sur l'expérience, au même titre que les autres. Où peut être l'inconvénient d'une telle manière de procéder? Dans une Science strictement logique, comme l'Arithmétique ou l'Algèbre, on s'interdit, cela va de soi, de recourir à l'observation. Mais dans une Science physique, où les bases sont forcément expérimentales, mieux vaut, je l'ai dit, faire un emprunt de plus à la Nature que d'accroître bénévolement les difficultés d'exposition au point d'obscurcir les idées et de rebuter les commençants.

Les principes que je vais examiner mériteraient donc beaucoup mieux le nom de *lois naturelles*. Je leur ai conservé celui d'axiome pour me conformer à l'usage; mais, afin de prévenir toute ambiguïté, j'ajouterai le qualificatif de géométrique. Ils se réduisent à un petit nombre de propriétés essentielles de la ligne droite et du plan. Un trait commun les distingue : ces propriétés, ou les aphorismes qui les expriment, bien que déduites de l'observation, sont tellement façonnées pour notre entendement qu'aussitôt formulées elles nous semblent évidentes en

soi. Cette impression tient, d'une part, à la clarté du sujet et, d'autre part, à la vérification inconsciente que nous en avons faite dès l'enfance. C'est ce qui explique que de très jeunes intelligences, remarquablement douées, Pascal, Galois, J. Bertrand, aient pu découvrir sans aucune aide les premiers théorèmes de la Géométrie.

I. — LA LIGNE DROITE EST LE PLUS COURT CHEMIN D'UN POINT A UN AUTRE.

La plus élémentaire expérience met en relief cette propriété. Si nous tenons, par exemple, un fil parfaitement tendu entre nos deux mains, nous constatons que toute tentative pour écarter le fil de sa direction et en faire une ligne brisée, nous oblige à rapprocher les mains, et cela d'autant plus que le fil est écarté davantage de sa direction primitive. La même expérience peut être opérée avec des appareils perfectionnés : la moindre déviation du fil entraînera toujours un rapprochement de ses points d'attache. Réciproquement, tant qu'un fil pris par ses deux extrémités n'est pas exactement tendu, mais conserve une

forme vague, les points d'attache sont susceptibles de s'écarter; le maximum d'écart, celui qui marque l'arrêt des points d'attache, correspond à la forme rigide nommée par nous *rectiligne*. Cette forme est donc celle qui fournit le plus grand écart possible et par conséquent elle représente un chemin plus court que tout autre, qui pourrait être suivi entre les deux mêmes extrémités.

Cette vérité est souvent présentée comme évidente par elle-même, et comme découlant de l'impossibilité où nous sommes de concevoir les choses autrement. On assure qu'elle est tellement liée à la faculté de raisonner (ce qui tendrait à en faire un axiome d'ordre logique) qu' « un enfant et les animaux eux-mêmes, guidés par leur instinct, ne s'y trompent pas » : en présence d'un but qu'ils désirent atteindre, il suivent, dit-on, naturellement la ligne droite, si aucun obstacle matériel ne les en détourne. J'ignore si cette observation a été recueillie dans des conditions vraiment scientifiques, et si le sujet soumis à l'épreuve n'avait pas déjà eu l'occasion de faire son éducation pratique. J'ignore également si le but, vu de face, n'impressionne pas la rétine assez pour que le sujet obéisse inconsciemment

à cette cause toute physique. Il se maintient dans la ligne qui correspond à cette impression ou qui lui fait voir constamment le but sous la même face. Un tel acte n'implique de sa part aucun jugement sur la brièveté relative du parcours. Quoi qu'il en soit, on ne court aucun risque à admettre que cette loi est prouvée par l'expérience. Les partisans mêmes de l'évidence intuitive ne sauraient s'en plaindre : ils y trouveront un surcroît de certitude.

Plusieurs géomètres, invoquant, d'ailleurs à tort, l'autorité d'Euclide, donnent cette proposition comme la définition même de la ligne droite. Sans doute elle ne contrevient pas aux règles d'une bonne définition, en ce sens qu'elle s'applique exactement à l'objet défini et ne s'applique qu'à lui. Mais elle n'en fournit pas la représentation. L'homme qui n'aurait jamais vu de ligne droite serait fort en peine de la tracer d'après les termes de la définition. C'est un peu comme si on lui demandait de décrire un cercle en lui indiquant seulement que le cercle enserre la plus grande surface dans un contour déterminé. Cette propriété, bien que caractéristique du cercle, n'en évoque pas l'image. Au contraire l'hésitation disparaît si l'on ajoute que tous les

points sont à égale distance du centre. Il devient alors possible de le tracer. La ligne droite, plus simple que le cercle et même irréductible, ne peut être dépeinte par aucune de ses propriétés, car toute formule qui prétendrait la faire voir impliquerait la connaissance même de la forme rectiligne. Il faut l'observer directement, ainsi que je l'ai indiqué avec insistance à l'occasion du concept.

Ce premier axiome, que je rattache à l'expérience, pourrait cependant être établi logiquement, non en vertu du principe souvent trompeur de l' « évidence », mais par une série de déductions qui reposent sur les autres propriétés de la ligne droite et sur certaines considérations analytiques. A la rigueur donc, le nombre des propriétés essentielles, que j'ai porté à six, pourrait être ramené à cinq. Voici comment procèdent les auteurs qui préfèrent ne pas recourir à l'expérience.

1° On démontre, à l'aide des seules propriétés II et IV, plusieurs théorèmes, notamment celui-ci : « Dans un triangle le plus grand côté est opposé au plus grand angle »; d'où l'on

conclut que dans un triangle un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres et plus grand que leur différence, et finalement qu' « une ligne droite est moindre qu'une ligne brisée quelconque aboutissant aux mêmes extrémités ».

2° Ce point acquis, on substitue la courbe à la ligne brisée, et il faut prouver que cette courbe aussi est plus longue que la ligne droite qui en joint les deux extrémités. Ici l'on fait appel à un principe très général, constamment invoqué dans l'Analyse infinitésimale, savoir que « dans une somme d'éléments infiniment petits on peut, sans changer la limite de cette somme, altérer chacun des éléments d'une fraction de lui-même infiniment petite ». En effet la différence totale qu'on introduit ainsi est moindre que la plus grande de ces fractions, multipliée par la somme des éléments. Mais celle-ci est finie, tandis que la fraction maxima est infiniment petite. Le produit est donc lui-même infiniment petit et ne saurait par suite influer sur la limite cherchée. Vient ensuite une démonstration assez laborieuse. Pour qu'on ne me soupçonne pas de la compliquer à dessein, je l'emprunte à l'un de nos plus distingués géo-

mètres, placé à un point de vue différent du mien (¹) :

« Supposons que l'on ait un triangle dont un seul angle soit infiniment petit. Le côté opposé à cet angle sera infiniment petit *par rapport à chacun des deux autres*, et il en sera de même, à plus forte raison, de la différence de ces deux côtés *par rapport à chacun d'eux*. Nous énoncerons ce résultat d'une manière abrégée, en disant que les deux côtés qui comprennent l'angle infiniment petit *diffèrent infiniment peu l'un de l'autre*.

» Il résulte de là que, si l'on projette, par des parallèles de direction quelconque, orthogonale ou non, une droite de longueur donnée sur un axe faisant avec cette droite un angle infiniment petit, la différence entre la droite et sa projection sera infiniment petite *par rapport* à chacune d'elles; en d'autres termes, la droite et sa projection *différeront infiniment peu*.

» Donc, si la droite qui ferme un contour polygonal fait avec chacun des côtés de ce con-

---

(¹) M. J. Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, p. 86, 2ᵉ édition, chez Gauthier-Villars, Paris.

tour des angles infiniment petits, la longueur de cette droite ne différera qu'infiniment peu de celle du contour polygonal.

» Cela posé, considérons un arc d'une courbe, que nous supposerons plane, pour plus de simplicité, et admettons que cet arc soit entièrement convexe [1]. D'après les corollaires de la proposition 20 du premier Livre d'Euclide, on voit : 1° que le contour d'un polygone inscrit dans l'arc convexe croît à mesure que l'on établit de nouveaux sommets intermédiaires, en subdivisant les arcs; 2° que le contour d'un polygone circonscrit au même arc diminue à mesure que l'on trace de nouveaux côtés, dont les points de contact subdivisent les arcs; 3° qu'un quelconque des contours inscrits est toujours moindre qu'un quelconque des contours circonscrits.

» On en conclut d'abord : 1° que les contours inscrits, dont on augmente le nombre des côtés suivant une certaine loi, allant d'une part toujours en croissant, mais restant d'autre part toujours moindres qu'un polygone circonscrit quelconque, tendront nécessairement vers une

[1] S'il ne l'était pas, on le décomposerait en portions convexes (Note de M. Hoüel).

certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision ;

» 2° Que les contours circonscrits, allant toujours en diminuant par la subdivision des arcs, et restant toujours supérieurs à un polygone inscrit quelconque, tendront aussi vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision.

» Il reste à prouver que tous ces contours, tant inscrits que circonscrits, tendent vers une seule et même limite, indépendante de la loi de subdivision.

» Considérons un côté d'un contour inscrit, et un polygone inscrit dans l'arc sous-tendu par ce côté. Si ce côté est assez petit, sa direction, ainsi que la direction d'un côté quelconque du polygone en question, fera un angle aussi petit qu'on voudra avec la tangente en un quelconque des points de l'arc. Donc, d'après la proposition démontrée ci-dessus, le côté et le polygone diffèrent l'un de l'autre *infiniment peu*.

» Soient maintenant deux polygones inscrits quelconques, à côtés suffisamment petits. Si nous les comparons l'un et l'autre au polygone formé par la réunion de tous leurs sommets, et correspondant par conséquent à une subdivision

de chacun des deux systèmes d'arcs, chaque côté de l'un quelconque des deux contours primitifs différera infiniment peu de la portion correspondante du troisième contour. Donc, chacun des deux premiers contours différera infiniment peu du troisième, et par suite les deux premiers contours différeront infiniment peu l'un de l'autre. Donc ils ne peuvent tendre que vers une seule et même limite.

» On étendrait de même ce résultat à deux polygones circonscrits, ou à un polygone inscrit comparé avec un polygone circonscrit.

» Ainsi se trouve établie l'existence de la *longueur* d'une courbe plane.

» Il en résulte en même temps :

» 1° Que cette longueur est plus grande que celle d'une ligne droite ayant les mêmes extrémités ;

» 2° Qu'une courbe convexe est plus courte qu'une courbe quelconque qui l'enveloppe de toutes parts sans la couper, ou qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités ;

» 3° Que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité [1]. »

---

[1] Les mots en italiques sont ainsi dans l'original.

Eh! bien, je le demande, est-ce que la connaissance de cette propriété fondamentale de la ligne droite n'est pas antérieure, dans notre esprit, à la démonstration que je viens de rapporter? Faut-il être un géomètre exercé pour avoir la pleine conviction que la ligne droite est la plus courte des lignes menées entre deux mêmes points? Est-ce que cette vérité n'a pas éclaté à nos yeux, dès la plus tendre enfance, par les expériences inconscientes et répétées que nous en avons faites? Doit-on, par un respect exagéré de la logique, attendre de s'être fort avancé dans la Géométrie pour formuler un énoncé qui dès les premiers pas est sur toutes les lèvres? Et n'est-il pas préférable de mettre tout de suite cette loi sur le même pied que les quatre ou cinq autres de même valeur, qui servent de fondement à la Science de l'étendue? Aussi, ne suis-je point étonné que Legendre, malgré sa grande puissance d'analyste, ait admis cette propriété sans la discuter.

La ligne droite étant le plus court chemin d'un point à un autre s'offre comme l'expression naturelle de la distance entre ces deux points. Car si l'on n'adoptait pas la ligne droite, quelle autre

ligne choisirait-on? Et comment les distances pourraient-elles se comparer, entre des points inégalement éloignés? Il faudrait, de toute façon, que la ligne choisie fût constamment la même, par conséquent soigneusement définie, et en outre que ses parties fussent identiques ou superposables. C'est la condition indispensable pour qu'on puisse apprécier si une distance est double d'une autre. Or, en dehors de la ligne droite, nous ne connaissons que la circonférence qui remplisse cette condition. Mais cette circonférence devrait avoir le même rayon dans tous les cas, ce qui est manifestement impossible; on retombe donc sur la ligne droite, comme représentation et mesure de la distance. Ainsi se précise la notion précédemment acquise à l'aide d'un objet de forme invariable interposé entre les deux points. Suivant que cet objet remplissait exactement l'intervalle ou laissait un vide ou le débordait, nous avions l'impression de distances égales, ou plus petites, ou plus grandes. Désormais nous savons que nous pourrons les comparer au moyen des lignes droites tracées entre les points. Comme celles-ci sont superposables, applicables les unes sur les autres (nous y reviendrons tout à l'heure), chacune peut

s'évaluer ou se mesurer par le nombre de fois qu'elle contient une droite déterminée prise pour unité. Dans la Géométrie pratique, cette unité, en France, est le mètre avec ses multiples ou ses sous-multiples. Dans la Géométrie théorique, on fait rarement usage d'une unité particulière; il suffit qu'on sache que cette unité est possible et que les autres droites lui sont implicitement rapportées.

La notion de distance ou de « plus courte distance » est utilisée dans des relations autres que celle de deux points. La distance d'un point à une droite est exprimée par la perpendiculaire abaissée du point sur cette droite; car cette perpendiculaire est plus courte que toute autre ligne menée du point à la droite ou que toute oblique. On s'en rend facilement compte en prolongeant la perpendiculaire de l'autre côté de la droite, d'une quantité égale, et joignant l'extrémité au pied de l'oblique. De la sorte on forme un triangle dont la perpendiculaire avec son prolongement est l'un des côtés, tandis que l'oblique du dessus et celle du dessous sont les deux autres côtés. Le premier côté, ou la perpendiculaire prolongée, est plus petit que la somme des deux autres côtés ou des deux

obliques. Mais celles-ci sont égales, car le triangle du dessous pourrait être superposé au triangle du dessus. Donc la perpendiculaire primitive est plus petite que l'oblique quelconque menée du point à la droite. La distance entre deux droites parallèles, qui par définition reste constante, est mesurée par la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l'une des droites sur l'autre. On démontre par la suite que cette perpendiculaire l'est aussi par rapport à la première droite : ce qui fait dire que « la distance entre deux parallèles est mesurée par leur perpendiculaire commune ».

Deux droites non situées dans le même plan, et par conséquent non parallèles, n'en ont pas moins une perpendiculaire commune, mais une seule. Cette perpendiculaire unique est l'expression de la distance entre les deux droites, c'est-à-dire de la distance minima. Deux droites situées dans le même plan et non parallèles n'ont ni perpendiculaire commune ni distance minima. La distance d'un point quelconque de l'une à l'autre est représentée par la perpendiculaire abaissée du point sur cette dernière droite : distance qui varie continuellement selon le point choisi. La distance d'un point à une courbe

s'entend de la droite menée à un point de la courbe tel que cette droite soit perpendiculaire à la tangente de la courbe en ce point. Par exemple la distance d'un point à un cercle se mesure par la droite menée du point vers le centre du cercle et arrêtée à la circonférence.

Les surfaces sont l'objet de remarques analogues. La distance d'un point à un plan n'est autre que la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Cette perpendiculaire peut toujours être menée et l'on sait qu'elle est caractérisée par la propriété de faire un angle droit avec toute ligne droite tracée par son pied dans le plan. La distance de deux plans parallèles est exprimée par leur perpendiculaire commune, et la distance d'un point à une sphère s'obtient en menant une droite du point vers le centre de la sphère.

La notion de *longueur*, si répandue, est étroitement liée à celle de la ligne droite. La pos sibi lité de comparer les lignes droites a fait naître l'idée de longueur. La longueur d'un fil est l'étendue qu'il occupe quand il est tiré par ses deux extrémités et qu'il affecte la forme rectiligne. Deux fils sont d'égale longueur quand, tendus l'un et l'autre, ils aboutissent aux mêmes

extrémités. Un fil a une longueur moindre quand il n'arrive pas jusqu'à la même extrémité. C'est toujours la vue des droites qui nous fait parler de longueurs. Mais l'esprit va plus loin. Il fait de la longueur une propriété actuellement inhérente au fil. Il n'admet pas qu'il la perde quand il cesse d'être tendu, quand il est infléchi ou enroulé d'une manière quelconque sur lui-même — en supposant, bien entendu, que le fil soit inextensible, que l'effort pour le tendre ne lui fasse pas dépasser l'extrémité à laquelle il aboutit par son simple développement rectiligne. Le fil qui cesse d'être droit conserve donc pour nous sa longueur intrinsèque. De là une notion plus complexe : celle de la longueur d'une courbe. Cette longueur est celle que prendrait un fil absolument flexible et inextensible, après avoir coïncidé exactement avec la courbe, en avoir épousé la forme dans ses moindres détails. Cette parfaite coïncidence n'est pas toujours possible à obtenir dans la pratique ; elle ne l'est même jamais, à moins que la courbe n'appartienne à un solide qui permette d'enrouler le fil tout autour. Mais possible ou non la coïncidence se conçoit et cela suffit pour que nous ayons la vision très claire de la longueur de la courbe.

On peut arriver à la même notion par un autre chemin, suivi de préférence par les analystes. Ils recourent à la méthode des limites. Ils reprennent l'image de la courbe transformée en contour polygonal à côtés très petits et c'est la somme de ces côtés qui, à la limite, représente la longueur de la courbe. Le Calcul intégral a des procédés pour déterminer la valeur numérique de cette somme. Mais c'est toujours le même concept : la longueur est finalement figurée par une ligne droite.

Le terme de « longueur » est susceptible d'une signification abstraite et plus générale. Employé seul, sans qu'on le fasse suivre de l'énonciation d'un objet, il désigne l'étendue indéfinie d'une droite tracée dans un sens quelconque et alors il devient synonyme de dimension. « Les lignes, dit-on, n'ont qu'une dimension, la longueur; les surfaces en ont deux, longueur et largeur; les volumes en ont trois : longueur, largeur et hauteur ou épaisseur ». Ces locutions méritent qu'on s'y arrête.

Il est visible d'abord que la largeur et la hauteur ou épaisseur ne diffèrent pas substantiellement de la longueur. Au fond, ce sont trois

longueurs, auxquelles on donne des noms différents pour distinguer les sens suivant lesquels elles sont comptées. Dire qu'un volume a trois dimensions et n'en a que trois, signifie qu'il y a trois directions suivant lesquelles on peut cheminer dans l'intérieur du volume. Sur une surface on ne peut cheminer que dans deux directions et sur une ligne que dans une seule. Le fait est évident pour la ligne; il l'est un peu moins pour la surface, à moins qu'elle ne soit plane, et il paraît assez obscur pour le volume ou du moins il ne devient clair qu'après certaines explications.

Pour le plan, disons-nous, le fait est accepté sans difficulté. Pourquoi? Imaginons que le plan soit limité et affecte une forme régulière, par exemple, celle d'un rectangle. On peut d'abord parcourir un des côtés, qui figure la première dimension. On peut ensuite, d'un point quelconque de cette base, s'éloigner dans un sens perpendiculaire ou suivant la deuxième dimension et l'on rencontrera tout point du rectangle. En d'autres termes, les divers points du rectangle sont déterminés par leur distance à cette base. On peut imaginer aussi que l'on parcourt l'autre côté du rectangle ou la deuxième dimension en emportant avec soi le premier côté; on

engendre ainsi la surface dite *rectangulaire*. De quelque manière qu'on s'y prenne, on retrouve deux dimensions et deux seulement. Si, au lieu d'un rectangle, on envisage un plan indéfini, le résultat est le même : on peut tracer une droite indéfinie quelconque, qui figure la première dimension, et une autre droite indéfinie perpendiculaire, qui figure la deuxième dimension. Il n'est pas un point du plan qui ne soit rencontré quand on chemine d'abord sur l'une et ensuite sur l'autre dimension.

Si la surface n'est pas plane mais s'infléchit continuellement, on peut la considérer comme formée par un très grand nombre de facettes planes extrêmement petites. Chacune de ces facettes a deux dimensions comme le plan. La surface tout entière elle-même a deux dimensions, longueur et largeur, mais sans épaisseur. Cette locution ne veut pas dire, comme pour le plan, qu'en parcourant successivement deux droites rectangulaires on rencontrera tous les points de la surface; mais elle veut dire qu'en chaque point de la surface isolément on parcourt deux dimensions pour décrire l'élément superficiel [1].

[1] On pénètre plus intimement dans le phénomène en

De là on passe au volume, que je me figurerai d'abord sous la forme d'un parallélipipède droit. Les deux premières dimensions répondent à la base rectangulaire du parallélipipède. Tout autre point du volume est déterminé par sa distance à cette base ou par la troisième dimension. On peut également engendrer la base du rectangle en entraînant avec soi la première dimension le long de la deuxième, et puis entraîner avec soi ce rectangle le long de la troisième dimension et engendrer ainsi le parallélipipède. De ce cas particulier on conclut aisément au volume indéfini.

---

traçant sur la surface deux séries de courbes telles que, par chaque point de la surface, passe une courbe de chaque série, et une seule. Un point quelconque de la surface est ainsi défini par l'intersection des deux courbes, de familles différentes, qui y passent. Les quatre courbes qui passent par deux points quelconques forment un quadrilatère curviligne, et il suffit de cheminer sur deux côtés consécutifs de ce quadrilatère pour aller d'un point à l'autre. On peut donc, en partant d'un point particulier choisi une fois pour toutes, atteindre un autre point quelconque en cheminant successivement sur deux courbes de systèmes différents — de même qu'on atteint un point quelconque d'un plan, en partant de l'origine d'un système de coordonnées polaires et cheminant successivement suivant un rayon polaire et suivant un arc de cercle —. C'est ce qu'on exprime en disant que la surface courbe comme le plan a deux dimensions.

On remarquera que je suppose toujours les dimensions perpendiculaires entre elles. Cette manière de voir, non obligatoire, n'est cependant pas arbitraire. En effet, une première dimension étant établie, tout point du plan est particularisé par sa *distance* à cette base, c'est-à-dire par la perpendiculaire menée du point à la base, ce qui conduit à figurer les deux dimensions comme rectangulaires. Sans doute le point pourrait être déterminé par une ligne faisant avec la base un angle quelconque, de grandeur convenue. Mais c'est cela qui serait arbitraire et qui contrarierait le concept de la distance d'un point à un autre. En réalité le choix d'axes rectangulaires, pour la détermination des points d'une surface ou d'un volume, est imposé par la nature des choses, telles du moins que nous les avons définies. L'adoption occcasionnelle d'axes obliques est un artifice qui peut faciliter la solution d'une question particulière, mais elle n'est point en harmonie avec l'idée fondamentale de dimension. Ce sont deux ordres d'opérations entièrement distinctes. On ne reste dans la donnée des dimensions que par l'emploi d'axes rectangulaires.

La plupart des Traités de Géométrie intro-

duisent cette notion si importante sans aucune préparation et sous forme d'axiome. On débute par dire que « l'espace a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur ou profondeur » : que « les surfaces en ont deux », et que « les lignes n'en ont qu'une ». Il semblerait que la chose est évidente en soi ; tandis que des explications ne sont pas superflues. En ce qui concerne l'affirmation capitale : « l'espace a trois dimensions », il est d'autant plus nécessaire d'ajouter quelques commentaires, que la maxime ainsi présentée ne paraît pas correcte. L'espace, c'est-à-dire ce quelque chose d'infini en tous sens que nous désignons par ce mot, n'a pas à proprement parler de dimensions ; comme tout ce qui est infini, il échappe à la classification. On ne peut donc pas dire, *de plano*, que l'espace, que l'étendue indéfinie a une longueur ou une largeur. Il faut entendre que toute portion délimitée de l'espace, tout volume fini possède trois dimensions : et par conséquent, si l'on trace dans l'espace trois axes rectangulaires quelconques, on est assuré que tout point de l'espace peut être *situé* à l'aide de ces trois axes ou des trois dimensions qu'ils représentent. C'est là ce qui justifie la locution employée au sujet de l'espace.

II. D'UN POINT A UN AUTRE ON NE PEUT MENER QU'UNE SEULE LIGNE DROITE.

C'est encore là une vérité expérimentale qu'on présente trop souvent comme une de ces évidences que la raison proclame. Quelquefois on la regarde comme découlant de l'axiome précédent : « Puisque la ligne droite, dit-on, est le plus court chemin d'un point à un autre, elle est nécessairement unique ». Rien n'est moins certain *a priori*. Pourquoi n'y aurait-il pas plusieurs chemins minima, égaux entre eux, par conséquent? Sur une sphère, par exemple, il existe, entre les deux extrémités d'un diamètre, une infinité de chemins minima qui sont les arcs des grands cercles menés par ce diamètre. A la vérité, l'obligation de circuler sur la sphère change les conditions. Mais il faudrait expliquer tout cela, ce qui n'est pas facile, dans les préliminaires de la Géométrie. Je crois beaucoup plus sage de s'en référer à l'expérience. Elle n'est, d'ailleurs, pas longue à recueillir : elle accompagne la constatation de la plus courte

distance. Le fil tendu entre deux points montre *ipso facto* que la position de ce fil est unique : car d'autres fils tendus aboutissant aux mêmes extrémités le recouvrent exactement. Les instruments les plus délicats ne décèleront pas le plus léger écart.

Deux points suffisent donc à déterminer la position d'une droite entre ces points. La déterminent-ils aussi en dehors de ces points, au delà et en deçà ? En d'autres termes, deux droites qui ont deux points communs coïncident-elles dans toute leur étendue indéfinie ? L'expérience le montrerait encore. Quels que soient les deux points par lesquels on met en contact deux tiges rigides rectilignes, on reconnaît qu'elles coïncident dans toute leur longueur. On entreprend quelquefois de le démontrer par le raisonnement suivant : « Élevons par l'un des deux points une perpendiculaire à la partie commune ; cette perpendiculaire fera un angle droit avec chacun des deux prolongements. Donc ceux-ci se confondront ; sans quoi l'un des deux angles droits serait plus petit que l'autre, ce qui est absurde ». Ce raisonnement serait rigoureux si les deux prolongements et la perpendiculaire devaient se trouver forcément dans le même plan. Or rien à

l'avance ne l'indique. Il faut donc renoncer à cette preuve.

On présente un autre argument qui ne me semble pas plus rigoureux. « La coïncidence, dit-on, entre deux points entraîne la coïncidence totale, car les points peuvent être choisis aussi loin qu'il plaît. » Sans doute, les points peuvent être choisis aussi loin qu'il plaît; mais, par cela même qu'on les suppose existants, ils sont à une distance finie l'un de l'autre et laissent en dehors toute l'étendue indéfinie. Qu'est-ce qui empêcherait qu'au delà des points fixés les droites ne se détachent comme les tiges d'une gerbe qui s'épanouit en dehors des liens. On objectera que les tiges sont flexibles et que les droites géométriques ne le sont pas. Mais c'est répondre à la question par la question, puisqu'il s'agit précisément de savoir si les droites ne sont pas susceptibles, à un certain moment, de s'infléchir et de se séparer.

En résumé, l'expérience est nécessaire pour établir la coïncidence.

Puisque je parle d'expérience, je tiens à en bien préciser la portée, tant pour cet axiome que pour le précédent et les suivants. Nous sommes ici dans la même situation que vis-à-vis de toutes

les lois physiques. Si bien conduites qu'aient été les observations, elle n'entraîneraient pas notre conviction sans retour, si des vérifications *a posteriori*, obtenues sur une multitude de faits auxquels ces lois sont mêlées, n'en confirmaient pas la justesse. Les axiomes géométriques n'échappent pas au sort commun. Ils attendent, pour être proclamés absolument vrais, que des conséquences sans nombre se montrent d'accord avec la réalité. Ce travail a été plus rapidement fait pour ces lois spéciales parce qu'elles ont un degré de simplicité que n'atteignent presque jamais les autres lois physiques. Elles ont, en outre, ce privilège, au lieu d'étonner l'esprit, de le satisfaire par une sorte de révélation pressentie. Enfin, l'enchaînement des déductions est tellement serré, qu'aucune parcelle d'erreur ne saurait se glisser sans être immédiatement aperçue. Tout cela donne aux lois naturelles de la Géométrie un caractère particulier de certitude et explique le nom d'axiome qui, par privilège, leur a été accordé.

Puisque deux points déterminent la position d'une ligne droite dans toute son étendue, il s'ensuit que deux droites quelconques, tracées

comme on voudra dans l'espace, sont susceptibles de coïncider. En effet, on pourra toujours les amener à avoir un point commun et, une fois ce point commun obtenu, on fera tourner l'une des droites autour de ce point jusqu'à ce qu'un autre point de cette droite vienne se superposer en quelque endroit de la droite immobile [1]. A ce moment précis, les deux lignes ayant deux points communs se confondront dans toute leur longueur. D'où cette conséquence capitale que toutes les lignes droites — sauf leur plus ou moins de grandeur — sont identiques, et qu'une portion quelconque de droite peut toujours être appliquée sur une autre droite. D'où, encore, les portions d'une même droite peuvent être appliquées indifféremment les unes sur les autres : ce qui équivaut à la possibilité pour une droite de « glisser sur elle-même ».

On peut dire aussi que deux droites — c'est la formule d'Euclide — « ne peuvent enclore un espace »; puisque, ayant deux points communs, elles se confondent rigoureusement.

Ces diverses propriétés et l'axiome qui les ren-

---

[1] Nous anticipons encore sur les propriétés du plan, mais c'est inévitable et sans nul inconvénient.

ferme, bien que liées étroitement à la droite, ne suffiraient cependant pas à la caractériser ou à la différencier entièrement de toute autre forme. En effet, la circonférence d'un cercle ou les circonférences de même rayon donnent lieu aux mêmes constatations. Deux arcs (de même rayon) qui ont deux points communs peuvent coïncider dans toute leur étendue. Tous les arcs (de même rayon) sont identiques et peuvent s'appliquer les uns sur les autres. Un arc de cercle peut glisser sur lui-même, et tout le long de la circonférence. On voit dès lors combien on est mal fondé à s'emparer d'une de ces propriétés pour définir la ligne droite. Il ne faut pas dire, par exemple, avec certains auteurs : « La ligne droite est une ligne semblable à elle-même en tous ses points [1] » ou « dont une portion peut glisser sur la ligne sans cesser de lui appartenir ». Ce sont là des définitions incomplètes et, partant, insuffisantes. Elles font simplement ressortir, par leur insuffisance même, les rapports profonds qui existent entre la ligne droite et le cercle et qui obligent à chercher d'autres pro-

[1] On prête une formule analogue à Euclide, mais rien ne prouve que la pensée du grand géomètre nous ait été fidèlement transmise.

priétés pour les distinguer. L'axiome premier et les deux suivants n'encourent pas le même reproche.

III. — UNE LIGNE DROITE PEUT ÊTRE PROLONGÉE INDÉFINIMENT DANS LES DEUX SENS.

C'est certainement la propriété qui paraît la plus évidente par elle-même, et beaucoup se demanderont s'il est bien nécessaire d'en faire une loi naturelle. Je le crois, pour ma part, précisément parce qu'on a négligé de le faire et que, tout en le négligeant, on s'appuie implicitement sur cette loi; ce qui tendrait à accréditer l'idée qu'il s'agit là d'un axiome de raison. Je le crois encore parce que certains géomètres ont admis, à l'inverse, que la longueur ou la distance pouvait avoir une limite supérieure.

La vérité est que notre notion de l'espace — je parle de la notion commune — entraîne l'infinité et que dès lors nous ne comprendrions pas que certaines lignes ou certaines surfaces ne puissent pas se développer indéfiniment. Toutefois, pour ne parler que des lignes, nous conce-

vons qu'il en existe de fermées ou qui reviennent sur elles-mêmes, comme un cercle, une ellipse, une spirale. Celles-là ne traversent pas l'espace de part en part. D'autres, au contraire, vont indéfiniment devant elles. La ligne droite est du nombre. Mais elle n'est pas seule : une multitude de courbes hyperboliques, paraboliques, sinusoïdales, etc., font de même. Qu'est-ce qui nous prouve *a priori* que la ligne droite en particulier n'est pas fermée et ne revient pas sur elle-même? Rien, si ce n'est l'expérience. D'abord elle n'est pas fermée, comme le cercle, l'ellipse ; car, si elle l'était, une autre droite, également fermée, pourrait la couper en deux points : résultat contradictoire à l'axiome expérimental ci-dessus, aux termes duquel deux droites qui ont deux points communs coïncident. La ligne droite, sans être fermée, peut-elle rentrer sur elle-même, ce qui l'empêcherait de s'étendre à l'infini dans l'espace? Il semble bien qu'une telle configuration ne se concilierait pas avec notre concept de la ligne droite. Mais prenons garde que ce concept ne se forme qu'à la suite de nos impressions physiques. Si donc nous n'imaginons pas la ligne droite comme pouvant rentrer sur elle-même, c'est, il faut bien le dire, parce que

nous n'avons observé rien de semblable et qu'il nous apparaît que toute ligne offrant cette propriété à quelque degré serait dès lors susceptible d'être coupée en deux points par une ligne identique, phénomène impossible chez les lignes droites, en vertu de l'axiome précité. C'est donc l'expérience qui, en dernière analyse, prononce. Ce point est essentiel et, selon moi, ne doit pas être laissé dans l'ombre.

La ligne droite jouissant, dans notre esprit, de la propriété de pouvoir s'étendre sans limite, on en déduit, sans le dire formellement, une foule de conséquences. D'abord, toutes les fois que la question se présente, comme pour les parallèles et les asymptotes, on n'est pas tenu d'assigner des bornes à la figure. Ensuite, ce qui est encore plus général, on peut tracer dans l'espace des axes rectilignes indéfinis et rapporter à ces axes la position de tous points de l'espace, si éloignés qu'ils soient. C'est là un avantage de premier ordre. Il est clair, par exemple, que si ces axes étaient analogues à des arcs de cercle ou d'ellipse, même avec un très grand rayon, ils embrasseraient toujours un espace limité et, par conséquent, ne permettraient pas l'enregistrement des points les plus éloignés.

IV. — LA LIGNE DROITE PEUT SERVIR D'AXE DE ROTATION.

J'entends par là qu'une figure invariable peut tourner autour d'une ligne droite sans subir aucune déformation.

Cette propriété, comme la précédente, est continuellement utilisée dans les démonstrations géométriques, sans qu'on juge nécessaire, le plus souvent, de l'invoquer en termes exprès. On fait tourner, par la pensée, une figure autour d'un de ses côtés rectilignes ou autour de quelque autre droite qui lui est reliée soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, et il ne vient pas à l'esprit que cette opération soit incompatible avec l'invariabilité de la figure. Cependant, on ne l'entreprendrait pas à l'égard de toute autre espèce de ligne : on sentirait qu'une telle tentative, dans la réalité, détruirait la figure ou la ligne. On s'appuie donc d'instinct sur l'impression qu'a causée la ligne droite. C'est un nouvel aspect du concept, qui, pour n'être pas toujours mis en lumière, n'en a pas moins d'importance.

Une telle propriété, en effet, n'est pas évidente par elle-même. Je dirai plus : si l'on y réfléchit, en faisant abstraction du témoignage antérieur des sens, on éprouve quelque peine à concevoir un pareil phénomène. Comment imaginer une série de points qui appartiennent à un objet en mouvement et qui cependant restent immobiles? Ce fait, en apparence paradoxal, n'aurait probablement jamais été deviné par nous; il a fallu que l'expérience nous le révélât. Nous le constatons dans l'ordre physique; nous voyons un corps solide tourner autour d'un axe fixe, par exemple, une roue autour de son essieu. Dès lors, par cette faculté d'abstraction, qui nous est inhérente, nous réduisons de plus en plus l'épaisseur de l'axe, sans qu'il cesse d'être rectiligne et immobile; à la fin, quand il n'est plus qu'une droite idéale, nous le concevons comme faisant corps désormais avec le solide, dont il constitue l'élément fixe pendant la rotation. On peut aussi observer une roue liée avec son essieu et celui-ci tournant sur des tourillons au repos. A une extrémité de l'essieu, tous les points décrivent des circonférences d'un rayon d'autant moindre qu'ils sont plus rapprochés du centre de l'essieu. Ce centre est bien réellement immobile, si nous

le réduisons à un point géométrique. Tout le long de l'essieu, jusqu'à l'autre bout, il existe une file de points intérieurs semblables qui gardent la même immobilité et qui constituent une ligne droite continue. Bref, la rotation de tout corps réel ou de toute figure géométrique s'effectue autour d'une droite idéale, qui reste en repos au milieu du mouvement général. Réciproquement toute droite géométrique peut être prise comme axe immobile d'une rotation qu'il nous plaît d'imaginer autour d'elle.

Cette propriété appartenant exclusivement à la ligne droite, comme celle de la plus courte distance, permettrait de la définir. Mais cette définition, sous une apparence analytique, serait, au fond, expérimentale puisque la propriété d'où elle émane est décelée par l'observation. Certains auteurs pensent qu'on peut lui réserver une origine abstraite, par la considération suivante: « Si l'on fixe un point dans un solide, celui-ci, manifestement, peut pirouetter dans tous les sens autour de ce point. Si l'on en fixe un second, le solide ne peut plus se mouvoir que dans un sens, c'est-à-dire tourner autour des deux points. Or ces deux points déterminent une droite, en sorte que réellement le solide tourne autour d'une

droite immobile ». Ce détour n'éclaircit pas la question, car il est tout aussi difficile de concevoir, *a priori*, le mouvement autour de deux points fixes qu'autour d'une droite fixe. Je trouve plus simple de recourir directement à l'observation du phénomène concret, qui se montre à nous, en général, sous l'aspect d'une rotation autour d'un axe.

V. UNE LIGNE DROITE QUI A COMMENCÉ PAR S'ÉLOIGNER D'UNE AUTRE NE PEUT PAS ENSUITE S'EN RAPPROCHER, ET RÉCIPROQUEMENT.

Soient deux droites situées dans le même plan, et supposons que l'une d'elles s'écarte de plus en plus de l'autre, à mesure qu'on se dirige, par exemple, de gauche à droite. La progression de l'écart se traduira par l'allongement des perpendiculaires abaissées des divers points de la première droite sur la seconde. La propriété énoncée consiste en ce fait qu'après avoir rencontré un certain nombre de perpendiculaires croissantes, on n'en rencontrera pas, en continuant d'aller dans le même sens, qui présentent

le phénomène inverse, c'est-à-dire qui se mettront à décroître. La vérification expérimentale est facile : aussi loin qu'on prolonge les droites, on constate qu'en effet les perpendiculaires ne cessent pas d'augmenter. La croissance est plus ou moins rapide selon que l'inclinaison mutuelle des lignes est plus ou moins accentuée, mais elle ne s'arrête jamais et, avec des instruments suffisamment délicats, on la mettrait en relief pour les inclinaisons les plus faibles. L'extension du champ d'expérience n'amenant aucune défaillance dans la loi, on est en droit de conclure qu'elle est vraie pour toute distance ou absolument générale.

Cette propriété est du même ordre que les précédentes ; elle est non moins simple et s'harmonise aussi bien avec la nature de notre esprit. On peut dire qu'aussitôt signalée elle apparaît comme nécessaire. Cette sorte d'évidence, *a posteriori*, tient à ce que nous possédons déjà le type de la ligne droite et que sa manière d'être nous est devenue familière. Une propriété nouvelle qui vient à être énoncée à son sujet, loin de nous étonner, semble rentrer dans l'idée générale que nous nous sommes formée et nous n'éprouvons pas le besoin d'une vérification directe.

Nous devons faire une sorte d'effort sur nous-mêmes pour juger utile d'en appeler à l'expérience.

La loi actuelle, quand on la regarde de près, est le complément naturel des quatre premières. Elle achève de peindre la ligne droite. Jusqu'ici nous avions envisagé cette forme en soi, isolément. Il restait à apprécier le rapport mutuel de deux droites, à préciser la notion de convergence ou de divergence indéfinie, qui nous paraît inséparable du type et qui le montre sous son dernier aspect. Deux lignes quelconques n'ont pas forcément ce genre de relation. Après s'être éloignées l'une de l'autre nous comprenons fort bien qu'elles puissent se rapprocher, comme font, par exemple, les deux moitiés d'une ellipse ou d'une circonférence. Mais dans le concept de la ligne droite, tel que les propriétés précédentes l'ont fixé dans notre esprit, s'introduit une idée de constance ou d'uniformité, qui paraît incompatible avec des alternances de rapprochement et d'éloignement. Ce sentiment ne nous dispense pas, bien entendu, pour que nous ayons pleine sécurité, d'opérer un contrôle aussi rigoureux que possible. J'ai voulu seulement expliquer pourquoi cette propriété s'offre à nous sous le

couvert de l'évidence et se fait si facilement accepter.

Elle n'est pas d'ailleurs exclusive à la ligne droite, du moins dans les termes où je l'ai présentée. Un grand nombre de courbes, par exemple, les branches d'une hyperbole ou d'une parabole, la possèdent aussi : elles s'écartent indéfiniment l'une de l'autre. Ce qui différencie l'allure de ces courbes de celle de la ligne droite, c'est que chez cette dernière l'écartement est non seulement progressif mais régulier, j'entends proportionnel à la longueur du parcours, ainsi qu'on le démontre plus tard. Mais nous n'avons pas besoin ici d'une telle précision : l'axiome se borne à la constatation du phénomène de la divergence dans sa généralité.

Cette propriété est susceptible d'une démonstration logique ou peut être rattachée aux précédentes, dans un cas : lorsque les deux droites ont un point de rencontre certain, lorsqu'on est en mesure *a priori* d'en affirmer l'existence ; en d'autres termes, lorsqu'on sait qu'elles forment un angle. En ce cas, on fait tourner l'angle autour d'un de ses côtés et on le rabat sur le plan, autant de fois qu'il est nécessaire pour revenir au point de départ. Un raisonnement indépendant de

toute expérience directe et que je n'ai pas à reproduire, permet d'établir la croissance continue des perpendiculaires.

On remarquera que je viens de distinguer entre le phénomène de la convergence pure et simple et le phénomène de la rencontre positive. En effet, il n'est pas évident en soi que deux droites qui se rapprochent de plus en plus se rencontreront nécessairement, et, d'autre part, les observations physiques n'en procurent pas toujours la preuve. Nous pouvons bien constater expérimentalement que, si lente que soit la variation de grandeur des perpendiculaires, elle s'exerce sans cesse dans le même sens, mais nous ne pouvons pas constater toujours qu'elle amènera la rencontre. Car si les deux droites, dans la région limitée où nous opérons, sont très éloignées l'une de l'autre, et si leur convergence est très faible, la rencontre, en admettant qu'elle ait lieu, se dérobera à nos moyens d'investigation, elle se produira hors de notre portée. On saisit la nuance, elle est essentielle : nous observons physiquement la convergence, mais nous n'observons pas la rencontre, quand elle est trop lointaine. Nous restons à cet égard dans le même

doute que s'il s'agissait de deux lignes asymptotiques; nous voyons celles-ci se rapprocher, mais nous n'avons pas le droit de conclure qu'elles se rejoindront, et, en fait, elles ne se rejoignent pas. Si les droites se rejoignent, en vertu de la convergence, c'est parce qu'elles se rapprochent selon la loi particulière que j'ai mentionnée plus haut : celle de la proportionnalité. Mais, pour le moment, nous ne connaissons pas cette loi, et il serait vraiment excessif de la demander à l'expérience, car elle exigerait des mesures trop précises pour l'établissement d'un axiome.

Rappelons-nous que la certitude des lois naturelles n'est complète que si leurs conséquences logiques sont constamment d'accord avec les faits. Il faut se tenir en garde contre les possibilités d'erreurs qui se glissent dans les observations les mieux conduites. Quand on détermine des valeurs numériques, une petite fraction, variable selon l'observateur et les instruments dont il dispose, demeure toujours indécise. Les chances d'exactitude augmentent considérablement si l'on aboutit à des relations très simples; si l'on trouve, par exemple, que l'action est égale à la réaction, que la vitesse acquise demeure constante, que des droites qui ont deux

points communs coïncident, que l'écartement de deux droites augmente sans cesse, etc. Déjà, il serait plus difficile d'établir expérimentalement que cet écart est proportionnel au parcours parce que quelque autre loi très rapprochée pourrait également convenir. Ce seraient les vérifications *a posteriori* qui permettraient de prononcer.

L'axiome actuel fournit la démonstration de de la très importante proposition que j'ai par avance admise, quand j'ai défini les parallèles, à savoir qu'il est possible de tracer deux droites qui restent toujours à la même distance.

Menons, en effet, ces deux droites perpendiculairement à une troisième. Si elles se rapprochaient dans la partie supérieure (nous supposons, pour faciliter le langage, la perpendiculaire commune horizontale), elles devraient se rapprocher aussi dans la partie inférieure. Pour s'en convaincre, il suffit de faire tourner la figure autour de la perpendiculaire commune et de la rabattre en dessous. Le rapprochement qui s'est manifesté en haut se reproduira exactement en bas; d'autre part, les droites rabattues sont les prolongements des droites primitives, puisqu'elles font des angles droits avec l'axe de rota-

tion. On aurait donc, si l'on observe l'ensemble de la figure de haut en bas ou de bas en haut, ce spectacle de deux droites qui, après s'être écartées l'une de l'autre, en allant vers la perpendiculaire commune, se rapprocheraient ensuite, à mesure qu'elles s'en éloignent; ce qui est contraire à l'axiome. On montrerait de même qu'elles ne peuvent pas s'écarter l'une de l'autre, à mesure qu'elles s'éloignent de la perpendiculaire commune. Donc, elles restent toujours à la même distance. Ce théorème n'est, on le voit, que l'axiome lui-même, sous une autre forme. Mais la forme n'est pas indifférente. L'esprit est peut-être plus frappé de l'impossibilité, pour une droite, de s'éloigner et de se rapprocher successivement d'une autre droite, que de l'obligation de demeurer à la même distance. Car on a toujours présent l'exemple des lignes asymptotiques qui, bien que ne se rencontrant pas, ne demeurent pas à la même distance.

Il va de soi que, par un même point, il ne peut être mené qu'une seule parallèle à une droite donnée. Car si l'on tentait d'en mener une seconde, celle-ci, faisant un angle avec la première, ne pourrait comme elle demeurer à la même distance de la droite donnée et, par consé-

quent, ne remplirait pas la condition du parallélisme.

Par là se trouve assise la théorie des parallèles. Elle repose, on le voit : 1° sur le caractère de la définition, aux termes de laquelle les parallèles ne sont pas des droites « qui ne se rencontrent jamais », mais des droites « qui restent toujours à la même distance » ; 2° sur le présent axiome ou sur la propriété en vertu de laquelle une droite ne peut s'éloigner et se rapprocher successivement d'une autre droite, située dans le même plan.

Les géomètres n'ont pas coutume de comprendre cet axiome parmi ceux qu'ils énumèrent. Aussi, quand ils veulent constituer la théorie des parallèles, ils se trouvent en présence d'une difficulté insurmontable. Euclide, qui le premier l'a ressentie et l'a mise en relief, a voulu y parer en introduisant, sous le nom de *postulatum* ou de *demande*, une proposition non démontrée qu'il eût mieux fait d'intituler nettement axiome, comme les autres propriétés de la ligne droite. Ce terme de postulatum a fait naître l'illusion que la proposition attendait sa justification logique et qu'il dépendait de la

sagacité des géomètres de la trouver. Le nombre des tentatives opérées dans ce but est incalculable, et toutes ont été également infructueuses. Aujourd'hui l'on sait que la démonstration tant cherchée est impossible et qu'il s'agit bien de l'un des attributs de l'espace illimité et sans courbure dans lequel nous vivons. Pour ma part, j'admets l'existence de cet attribut dans toute sa rigueur, et alors la question qui se pose est celle de savoir sous quelle forme il convient de présenter l'axiome pour qu'il soit le plus aisément accepté. Car il ne suffit pas qu'un principe soit vrai; nous aimons encore à le rencontrer sous ces apparences de simplicité et de clarté que nous confondons si volontiers avec l'évidence et qui achèvent d'entraîner notre adhésion.

Le reproche qu'on peut faire à l'énoncé d'Euclide c'est de manquer en partie de cet avantage. Ne le cédant en rigueur à aucun de ceux qui ont été proposés depuis, il est moins saisissant que tels d'entre eux et il triomphe moins rapidement des scrupules. Dire que « si deux droites font avec une troisième des angles intérieurs dont la somme soit inférieure à deux angles droits, elles devront se rejoindre », pro-

voque au premier abord de l'hésitation. La disposition de la figure est un peu compliquée et l'on attend un commentaire. Nous ne sommes pas très surpris que tant de géomètres aient poursuivi une démonstration, qu'Euclide lui-même se réservait peut-être de trouver plus tard. La formule préférée par Legendre, à savoir que « la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits », n'est pas plus évidente. Aussi a-t-il cru devoir en donner la preuve; mais cette longue argumentation, malgré l'autorité de son auteur, est maintenant abandonnée. Un troisième énoncé, qui s'est à peu près substitué aux deux autres est celui-ci : « Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une ligne droite ». Dans ces termes, l'axiome a le mérite d'être très net et très facile à saisir. Mais il offre un point faible, par où le doute a pénétré. En effet, il n'est pas manifeste que deux droites, partant du même point et s'écartant très peu l'une de l'autre, ne pourront pas s'abstenir toutes deux d'en rencontrer une troisième ou ne lui seront pas simultanément parallèles (le parallélisme étant, dans ce système, défini par l'absence d'intersection). On se heurte toujours à cet obstacle : Qu'est-ce qui empêche deux droites

de se rapprocher indéfiniment l'une de l'autre, sans arriver à se rencontrer?

En regard de ces diverses formules et de quelques autres moins répandues, il me semble que celle que je propose n'est pas sans avantage. Personne, si je ne me trompe, ne songera à s'élever contre cette assertion qu'« une droite qui a commencé par s'éloigner d'une autre droite ne change pas ensuite d'allure pour s'en rapprocher ». Cette constance de divergence ou de convergence apparaît comme un attribut j'allais dire nécessaire de la ligne droite. Il rentre du moins si naturellement dans la donnée générale de cette forme que notre adhésion est immédiate et que nous nous croirions presque dispensés de recourir à une vérification expérimentale si les règles d'une bonne méthode ne nous en faisaient un devoir.

Quaud on renonce à s'appuyer sur le présent axiome — ou sur tout autre équivalent — on est rejeté vers la Géométrie non-euclidienne de Lobatchevski, d'après laquelle plusieurs parallèles peuvent être menées à une droite donnée par un point donné. Comme conséquence, la somme des angles d'un triangle cesse d'être

égale à deux angles droits, et il n'existe plus de figures semblables. A la vérité ces divergences avec la Géométrie ordinaire n'éclatent que dans des figures d'une si grande dimension qu'elles échappent à notre contrôle. Même dans les triangles astronomiques, la différence entre la somme des angles d'un triangle et deux droits est insensible. Néanmoins, au point de vue dogmatique, on sent toute l'importance du changement et par suite la haute utilité de l'axiome ou du postulatum d'Euclide.

VI. DANS UN PLAN ON PEUT TRACER DES LIGNES DROITES DANS TOUS LES SENS.

Ce n'est pas là une définition, mais un axiome ou une propriété fondamentale du plan. N'oublions pas que le plan a été, comme la ligne droite, reconnu par le témoignage des sens : « Le plan, avons-nous dit, est une surface semblable à celle que nous montre une eau tranquille, de faible étendue. » Cette surface dont nous voyons la reproduction artificielle autour de nous et que la Nature a prise pour modèle, dans la confection

de certains minéraux, jouit de la propriété remarquable que par un quelconque de ses points on peut toujours mener une ligne droite qui s'y trouve entièrement contenue. Pour s'en assurer il suffit de prendre une tige rigide ou une règle métallique, façonnée pour coïncider à l'occasion avec un fil tendu, et de la porter sur la surface. Dans quelque sens qu'on l'y couche, on constatera qu'elle s'applique exactement sur elle. On n'apercevra pas un seul vide ou jour entre la règle et la surface. On peut aussi, sur les deux bords d'un bassin rempli d'eau, tendre un fil délié; il rasera strictement en tous ses points la surface de l'eau. Enfin, si de l'extrémité d'un plan on regarde un objet à une assez grande distance, faisant à peine saillie sur le plan, le rayon visuel qui, on le sait, se propage en ligne droite se confondra avec le plan dans tout son parcours. C'est même en s'aidant soit du rayon visuel, soit d'une règle rigide, soit d'un fil à plomb, qu'on contrôle à tout instant la surface qu'on s'évertue à rendre plane et qu'on parvient à lui donner cette régularité de forme que nous admirons dans une table de marbre ou dans une glace bien polie.

Plusieurs auteurs, fidèles à la méthode qu'ils

ont suivie pour la ligne droite (définie par eux : la ligne la plus courte entre deux points), définissent le plan : « une surface telle qu'une droite peut s'y appliquer dans tous les sens ». Cette méthode a un double inconvénient : d'une part, la définition ne fait pas voir le plan, n'évoque pas son image ; 2° elle repose sur la propriété même qu'il faudrait établir : car, ainsi que l'a déjà fait observer Gauss, il n'est pas évident *a priori* qu'il existe une surface susceptible de recevoir dans son intégrité l'empreinte d'une ligne droite quelconque. Cette propriété qui paraît si simple, par suite de l'usage qu'on en fait, devient, au contraire, fort discutable quand on l'examine *in abstracto*, en dehors de toute expérience. On se représente mal la possibilité d'appliquer exactement une droite en tous sens et assurément, si l'on n'avait pas déjà vu un plan, on mettrait en doute son existence. L'emploi d'une telle définition oblige donc immédiatement à démontrer la propriété même. Si l'on ne l'admet pas comme un fait physique, il faut alors procéder par le raisonnement. Pour ma part, je ne connais pas de démonstration inattaquable et je ne crois pas qu'on puisse en formuler une, parce que nous sommes ici en présence d'une loi, à mon avis,

irréductible. Le plan a son existence et ses propriétés tout comme la ligne droite ; ils ne dérivent pas l'un de l'autre. La Nature n'engendre pas le plan au moyen de la ligne droite ; elle le crée directement. C'est directement qu'il le faut envisager, si l'on place dans le monde extérieur les bases de la Géométrie.

Je ne suis donc pas disposé à accepter, en tant que définition, les divers modes de génération auxquels on a recours pour en déduire les propriétés fondamentales du plan. Un des plus usités consiste à présenter le plan comme dû à la rotation d'une droite autour d'un axe auquel elle est perpendiculaire. Certes, la surface ainsi engendrée est plane ; mais n'est-ce pas un plan particulier et tous les plans quelconques lui sont-ils identiques ? Toutes les droites qui divergent du centre de rotation ou toutes les positions successives de la droite génératrice sont contenues dans la surface ; mais qu'advient-il de toute autre droite ? Peut-on affirmer, parce qu'elle coupe deux rayons, qu'elle est contenue entièrement dans la surface ? Oui, si l'on a déjà établi qu'une droite qui a deux points dans un plan s'y trouve intégralement. Mais cela, c'est la propriété même du plan, résultat de l'observation. Le

mode de génération ne la met pas en évidence.

On dit aussi qu'un plan est la surface engendrée par une droite qui glisse sur les deux côtés d'un angle. Indiscutablement, la droite dans toutes ses positions est contenue dans la surface et il semble bien, dès lors, qu'une ligne droite menée d'un point quelconque d'un des côtés sur un point quelconque de l'autre côté, ou une ligne droite de direction quelconque est contenue dans le plan. Mais d'abord il faudrait excepter les lignes menées d'un point quelconque d'un des côtés parallèlement à l'autre côté, car ces droites pourraient n'avoir qu'un point commun avec la surface. En outre, et c'est peut-être là l'objection la plus grave, qu'est-ce qui prouve qu'une droite glissant sur les deux côtés d'un angle engendrera la même surface, quelle que soit la manière dont le glissement aura lieu? Par exemple, une droite qui tourne autour d'un point, pris sur l'un des côtés, en s'appuyant sur l'autre côté, engendre-t-elle nécessairement la même surface que si, prenant son centre de rotation sur ce dernier côté, elle avait tourné en s'appuyant sur le premier? Cela n'est pas évident, à moins qu'on n'ait déjà dans l'esprit que les deux côtés d'un angle déterminent un plan, c'est-à-dire à moins

que l'on n'ait déjà la notion du plan. Je pourrais multiplier les citations et je crois qu'il apparaîtrait clairement que rien ne supplée à l'observation physique et à la constatation directe de la propriété fondamentale.

De ce qu'une droite quelconque peut s'appliquer dans un plan, il s'ensuit qu'une droite qui a deux points dans un plan s'y trouve entièrement contenue. Il s'ensuit aussi que, pour aller d'un point à un autre du plan, par la plus courte distance, il faut cheminer dans le plan, ou que le plan est le lieu géométrique des plus courtes distances entre tous ses points. On peut dire encore que le plan est le lieu des plus courtes distances entre deux droites (qui y sont contenues), comme la ligne droite est la plus courte distance entre deux points. Au fond, ce ne sont là que des paraphrases de la même propriété.

On trouve aisément de nombreuses analogies entre les propriétés du plan et celles de la ligne droite. De même qu'entre deux points on ne peut mener qu'une seule ligne droite, de même entre un point et une droite on ne peut tracer qu'un seul plan. On peut d'abord en tracer un; car un plan contenant toutes sortes de lignes droites, il

est loisible de faire passer un plan par la droite donnée, puis de le faire tourner autour de cette droite jusqu'à ce qu'il rencontre le point donné. Mais on ne peut tracer un second plan dans les mêmes conditions, car ces deux plans ayant une ligne droite commune, on pourrait joindre un point quelconque de celle-ci au point donné, dans chacun des deux plans, et l'on aurait ainsi deux droites distinctes entre deux mêmes points, ce qui est contraire aux propriétés reconnues de la ligne droite. On présente parfois cette dernière partie du raisonnement sous une forme qui paraît plus simple, mais qui n'est pas rigoureuse. Après avoir fait tourner le plan jusqu'à la rencontre du point donné, on ajoute : « pour peu qu'on fasse tourner le plan davantage, il abandonnera le point fixé; donc il n'existe qu'un seul plan, etc. » Mais on commet là une pétition de principe, car, sans faire tourner le plan davantage, il pourrait y avoir deux plans distincts contenant à la fois le point et la droite; or il s'agit justement de prouver que ces deux plans se confondent.

La même argumentation prouve que les deux plans, qui se confondent entre le point et la droite, ne peuvent pas se séparer ni en deçà ni

au delà; car, s'ils se séparaient, deux droites passant par le point donné et par un même point de la droite donnée se sépareraient également, ce qui est encore contraire aux propriétés de la ligne droite. Donc deux plans qui ont un point et une droite en commun ou qui ont trois points communs coïncident dans toute leur étendue. Donc aussi trois points sont nécessaires et suffisants pour déterminer la position d'un plan, tout comme deux points déterminent la position d'une ligne droite. Pour la même raison encore, un plan peut être prolongé indéfiniment, en tous sens, sans jamais revenir sur lui-même, à l'instar d'une surface courbe. Car s'il revenait sur lui-même, on pourrait tracer dans ce plan des lignes droites qui offriraient le spectacle de revenir sur elles-mêmes, ce qui est contraire à l'axiome III. Enfin, il est permis de dire que tous les plans sont identiques; car on peut les transporter l'un sur l'autre de manière qu'ils aient une droite commune et un point commun. Or, dans cette situation, ils coïncident entièrement ou se confondent en un seul et même plan.

Cette dernière propriété est commune aux surfaces sphériques de même rayon. On peut les placer l'une sur l'autre, de telle sorte qu'elles

aient trois points communs, et alors elles se recouvrent exactement. Donc, de ce que deux surfaces qui ont trois points communs coïncident, on ne peut conclure qu'elles sont planes. La proposition directe, à savoir : « deux plans qui ont trois points communs coïncident » est vraie; mais l'inverse : « deux surfaces qui, ayant trois points communs, coïncident, sont planes », ne l'est pas.

Un plan est identique à lui-même en toutes ses parties. Car on peut toujours prendre une portion d'un autre plan et la porter successivement en tous les endroits du plan; on est sûr qu'elle s'y applique exactement. On exprime la même idée en disant qu'un plan peut glisser sur lui-même, comme le fait une ligne droite, sans se déformer ou sans manquer d'adhérer. C'est encore là une propriété qui n'est pas exclusive au plan et qui se retrouve chez une surface sphérique : on peut faire glisser une portion quelconque de celle-ci sur tout le reste de la sphère, sans qu'elle cesse de coïncider.

Enfin une portion de plan peut tourner autour d'une droite quelconque située dans le plan et prise comme charnière, et se rabattre sur le plan de manière à coïncider exactement avec lui. En

effet, si l'on coupe cette charnière par une perpendiculaire située dans le plan et qu'on procède au rabattement, quand celui-ci sera effectué — soit qu'on ait fait tourner de gauche à droite, soit qu'on ait fait tourner de droite à gauche — les deux parties de la perpendiculaire s'appliqueront exactement l'une sur l'autre. Et comme deux droites déterminent la position d'un plan, il s'ensuit que les deux zones planes, ainsi rabattues, contenant chacune l'axe de rotation et la perpendiculaire, se confondront rigoureusement, soit que le rabattement ait eu lieu en dessus, soit qu'il ait eu lieu en dessous. On voit aussi qu'un plan peut être retourné ou placé *sens dessus dessous*, sans qu'il en résulte aucun changement dans les relations géométriques. Cette propriété, de pouvoir coïncider par voie de rabattement ou de retournement, est spéciale au plan. La surface sphérique ne la possède pas : on peut, comme nous l'avons dit, faire glisser la sphère sur elle-même, mais on ne peut pas la retourner ou la rabattre, parce que la concavité et la convexité se font opposition. Le plan est la seule surface qui n'ait pas de concavité ou de convexité.

Constatons, pour clore cette série, que deux

plans se coupent toujours suivant une ligne droite. Chacun d'eux peut tourner autour de cette droite et être amené à coïncider avec l'autre. Autant de plans qu'on voudra peuvent être réunis par une charnière commune et se superposer comme les feuillets d'un livre — avec cette différence qu'ils n'engendrent aucune épaisseur, les surfaces accumulées étant idéales.

Remarquons, en passant, qu'une proposition que j'avais implicitement admise se trouve actuellement justifiée, à savoir qu'une droite qui coïncidait d'abord avec une autre et qui se relève ensuite pour former un angle peut, en continuant sa rotation autour du sommet, être appliquée exactement sur le prolongement de la droite. Car toute l'opération peut être effectuée dans un plan et, dès lors, la droite mobile devra, dans la suite de sa rotation, rencontrer en quelque point le prolongement de la droite fixe ; or ayant avec ce prolongement deux points communs elle coïncidera entièrement avec lui.

Toutes les propriétés que je viens d'énumérer se déduisent, on le voit, d'un axiome unique, tandis que les propriétés analogues de la ligne droite se rangent sous plusieurs axiomes dis-

tincts. Cela tient à ce que l'axiome fondamental du plan introduit la ligne droite et même les lignes droites, de telle sorte que le plan bénéficie de toutes les relations existant entre elles. Il n'est donc pas surprenant que les propriétés du plan soient connexes et se résolvent par une explication commune, laquelle ferait défaut si la première propriété observée n'impliquait pas l'existence des lignes droites.

Cette même raison rend inutile l'intervention d'un axiome spécial, analogue au ve, en ce qui concerne le parallélisme de deux plans ou le parallélisme d'une droite avec un plan — ce parallélisme étant d'ailleurs défini, comme celui des lignes droites, par la permanence de la distance ou par l'égalité des perpendiculaires abaissées sur le plan.

On démontre en Géométrie que toute droite perpendiculaire à deux autres qui passent par son pied dans un plan est perpendiculaire à toutes celles qu'on voudrait mener dans le plan, et que dès lors il est toujours possible d'ériger par un point donné une perpendiculaire à un plan donné. Sans entrer dans cette démonstration, je rappellerai que la Nature nous offre le spectacle d'une telle perpendicularité au moyen d'un fil à plomb

suspendu sur une surface parfaitement horizontale, celle d'une eau tranquille.

Pour tracer un plan parallèle à un plan donné, il suffira que les deux plans soient perpendiculaires à la même ligne droite. Ils rempliront par cela même la condition de rester toujours à la même distance l'un de l'autre. En effet, par la perpendiculaire commune faisons passer un troisième plan qui découpera sur les deux premiers deux droites à angle droit avec la perpendiculaire commune, et par conséquent parallèles entre elles. Les points des deux plans situés sur ces deux parallèles observeront partout la même distance. Et comme le troisième plan peut affecter une direction quelconque et tourner comme on voudra autour de la perpendiculaire commune, il s'ensuit que tous les points du premier plan seront à égale distance de ceux du second. Le parallélisme se trouve ainsi établi sans qu'il soit nécessaire de poser un nouvel axiome pour dire qu'un plan qui a commencé par s'éloigner d'un autre ne peut pas ensuite s'en rapprocher.

Finalement le plan, malgré son analogie avec la ligne droite, ne réclame qu'un seul axiome, tandis que la ligne droite en réclame cinq.

REMARQUE SUR LES TYPES ÉLÉMENTAIRES DE LA GÉOMÉTRIE.

La ligne droite et le plan sont les types élémentaires de ligne et de surface adoptés en Géométrie. On peut dire que cette Science repose entièrement sur eux. Pourquoi ces deux types et non pas d'autres? Qu'est-ce qui les a fait préférer? N'eût-il pas été possible de faire un autre choix et, avec des types différents, de construire une Géométrie différente?

Il est visible que la ligne droite et le plan n'ont pas été pris au hasard et que leur choix a été recommandé par de sérieuses considérations. Ils devaient, en premier lieu, sous peine d'engendrer une Science stérile, correspondre à des réalités que la Nature ou les arts présentent fréquemment. Or la ligne droite — pour parler d'elle d'abord — s'offre à nous dans d'importantes occasions. Je rappellerai :

1° Le fil tendu et spécialement le « fil à plomb »;

2° La trajectoire du rayon lumineux;

3° L'axe de rotation.

Ce ne sont pas là des faits arbitraires, produits de la fantaisie. Ils résultent de l'ordre des choses ou de nos besoins les plus constants. En outre, par sa propriété d'être « la plus courte possible » entre deux points, la ligne droite satisfait à nos concepts spontanés de distance et de longueur. Son adoption paraît donc déjà s'imposer. Enfin, elle jouit d'attributs que nous devons rechercher dans l'élaboration d'une Science. Elle est *la même partout*, j'entends par là que toutes les droites, distribuées comme on voudra dans l'espace, sont identiques; elles ne diffèrent que par la longueur. Or aucune autre ligne ne remplit cette condition : la plus simple des courbes, la circonférence elle-même, n'est identique à une autre circonférence que si elle a même rayon; pour peu que les rayons diffèrent, les circonférences ne sont pas superposables. De plus, elle est *illimitée* et se prête par conséquent aux combinaisons embrassant les plus vastes étendues. Or tout arc de cercle, d'ellipse et de n'importe quelle courbe fermée est forcément limité. Les courbes qui comme l'hyperbole ou la parabole sont indéfinies, à l'instar de la ligne droite, n'ont pas ses autres qualités : non seulement elles ne sont pas identiques entre elles, mais même les

portions d'une même courbe ne sont pas identiques les unes aux autres, elles ne peuvent pas se superposer. L'homme ne se trouvait donc pas libre de choisir un autre type que la ligne droite ou du moins il ne le pouvait faire qu'au prix des plus grandes difficultés et en méconnaissant la réalité.

L'adoption de la ligne droite entraînait celle du plan qui lui est adéquat, puisque la propriété fondamentale du plan est de contenir des lignes droites dans tous les sens. Le plan correspond en outre au phénomène de la surface des eaux tranquilles et à la confection de surfaces résistantes sur lesquelles un objet puisse demeurer en équilibre sous l'action de la pesanteur. Cette force qui nous domine de toutes parts devait nous diriger vers la conception d'une surface horizontale, c'est-à-dire d'un plan, dans une étendue limitée.

En résumé les types acceptés réalisent un ensemble de conditions qui les mettent hors de pair. Leur choix était rendu inévitable. La Géométrie se trouvait en face de données naturelles qu'il ne lui était pas plus permis de négliger qu'il n'est permis au physicien de négliger la chaleur et la lumière.

Toutefois, et malgré ces raisons décisives, on

peut concevoir une Géométrie conventionnelle, artificielle, basée sur des types autres que la ligne droite et le plan, et susceptible d'un développement logique. Les seuls types sur lesquels il soit vraiment possible de faire une pareille hypothèse, sans se lancer dans des complications inextricables, sont la circonférence et la sphère qui par certains côtés se rapprochent de la ligne droite et du plan, tout en leur restant très inférieures. Les circonférences, pour être comparables, devront avoir même rayon ; ce seront, par exemple, des circonférences de *grand cercle* ou dont le centre coïncide avec celui de la sphère. Les figures seront donc formées avec des arcs de grand cercle et des portions de surface sphérique.

Si la sphère a de grandes dimensions, comme celles du globe terrestre, et si les figures sont peu étendues, les résultats ne différeront pas en apparence de ceux de la Géométrie ordinaire, car les observations faites pour établir les propriétés fondamentales de l'arc de grand cercle et de la surface sphérique nous conduiront à formuler les mêmes axiomes. L'arc sera à nos yeux le plus court chemin d'un point à un autre, il sera déterminé par deux points, il ne se rapprochera pas d'un autre arc après s'en être éloigné, il pourra

être tracé dans tous les sens sur une surface sphérique; en un mot, avec une semblable échelle, nos observations physiques ne nous permettront pas de distinguer si nous raisonnons sur des droites et des plans ou sur des lignes et des surfaces courbes. Par conséquent les conclusions seront identiques. Mais il est bien évident qu'une partie de ces conclusions ne seront vraies qu'approximativement et que l'erreur apparaîtrait si le rayon de la sphère était moindre ou si les figures avaient plus d'étendue.

Il est facile de reconnaître quelles sont les conclusions qui tomberaient et celles, au contraire, qui persisteraient si la sphère était petite et les figures relativement grandes.

L'arc de grand cercle continuerait d'être le plus court chemin d'un point à un autre, les distances étant, bien entendu, mesurées sur la sphère et non à travers l'espace. Il serait toujours déterminé par deux de ses points; mais il ne pourrait pas servir d'axe de rotation, il ne pourrait pas être prolongé indéfiniment, et, après s'être éloigné d'un autre arc, il s'en rapprocherait ensuite, puisque deux grands cercles se coupent suivant un diamètre commun. Les angles polyédriques n'auraient plus la même signification,

les plans étant remplacés par des surfaces sphériques, mais on pourrait envisager les angles des arcs comme on envisage les angles des droites. Deux arcs seraient perpendiculaires quand ils formeraient des angles égaux et l'arc mené d'un point perpendiculairement à un arc en mesurerait la distance. La notion du parallélisme s'évanouirait, car deux arcs ne pourraient se maintenir à égale distance l'un de l'autre : deux arcs perpendiculaires à un troisième se rencontreraient nécessairement. La somme des angles d'un triangle oscillerait entre deux et six angles droits, ou entre deux et quatre angles droits, si l'on convient de ne pas considérer les triangles dont la base excède la demi-circonférence. Les cas d'égalité des triangles seraient les mêmes que dans la Géométrie ordinaire : deux triangles seraient égaux quand ils auraient un angle égal compris entre deux arcs égaux, ou un arc égal contigu à deux angles égaux, ou les trois arcs égaux chacun à chacun. Mais il n'y aurait pas de triangles semblables, puisqu'il n'est pas possible de tracer des arcs de grand cercle parallèles.

L'écart entre les deux Géométries tend naturellement à s'effacer — non en théorie mais en pratique — à mesure que le rayon de la sphère

augmente. Déjà quand il atteint celui du globe terrestre, je remarquais tout à l'heure que dans des figures restreintes l'observation ne révélait pas de différences appréciables. A plus forte raison, quand le rayon augmente encore, ces différences deviennent-elles insensibles, même dans des figures de grandes dimensions. Si l'on suppose un rayon non pas infini — ce sont des manières de parler : une sphère, par cela seul qu'on en articule le nom, possède un contour — mais indéfini, c'est-à-dire supérieur à toute quantité assignée, l'arc et la surface ne se distinguent plus, pratiquement, de la droite et du plan. La notion de parallélisme reparaît, car deux arcs peuvent ne pas se rapprocher, dans la limite de nos observations. C'est même cette complète analogie entre les résultats de la Géométrie ordinaire et ceux d'une sphère à rayon indéfini, qui porte certains géomètres à substituer l'hypothèse d'un espace sphérique ou limité à celle de l'espace infini affirmé par la raison commune. De là des variétés de Géométrie non-euclidienne auxquelles j'ai fait allusion.

On voit combien serait imparfaite une Géométrie construite avec des éléments autres que la

ligne droite et le plan, même dans le cas le plus simple, celui d'une surface sphérique et d'arcs de grand cercle. Si, à certains égards, on atteint plus de généralité, par contre on n'obtient ainsi que des lambeaux de la Géométrie ordinaire. Encore même ces lambeaux, si l'on va au fond des choses, supposent-ils certaines notions que la Géométrie ordinaire seule a pu donner. Car comment définirions-nous le cercle si nous n'avions pas déjà le concept du plan? Comment pourrions-nous affirmer qu'entre deux points de la surface sphérique on ne peut mener qu'un seul arc de grand cercle? etc. Tout bien considéré la Géométrie ordinaire est donc la seule qui puisse être établie directement. Elle est non seulement en harmonie avec les faits naturels les plus importants et avec nos propres concepts, mais elle est la seule susceptible d'un développement scientifique, au moyen des bases fournies par l'expérience directe. Toute autre Géométrie, outre ses complications et son insuffisance, lui ferait des emprunts implicites. On aperçoit ainsi la raison profonde du choix fait par les géomètres dès la plus haute antiquité, et l'impossibilité, nonobstant toutes les ressources de l'Analyse moderne, de se passer de cette Géométrie

primitive et des enseignements qu'elle nous a procurés.

J'ai à peine besoin de faire observer que la Géométrie conventionnelle dont je viens de m'occuper hypothétiquement n'a rien de commun avec la « Géométrie sphérique » exposée dans les Traités classiques. Celle-ci respecte tous les concepts et les théorèmes de la Géométrie ordinaire et en fait usage pour ce cas particulier.

— . —

CHAPITRE III.

DU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE.

Le problème essentiel de la Géométrie consiste à évaluer certains éléments des figures à l'aide de divers autres et, par suite, à étudier les relations qui existent entre eux.

La connaissance de ces relations est le préliminaire indispensable de tout problème de mesure. Elle occupe dans la Géométrie une place considérable et d'autant plus grande qu'elle présente par elle-même un vif intérêt, abstraction faite des questions de mesure dont elle donne la clef. Aussi est-il arrivé que les géomètres obéissant à une noble curiosité ont multiplié les recherches sur les relations, sans se préoccuper

toujours des facilités qui pourraient en sortir pour les évaluations mêmes. Lors donc qu'on regarde dans son ensemble l'œuvre géométrique il faut s'attendre à la trouver fractionnée suivant l'ordre de complexité croissante des figures, sans égard le plus souvent pour l'urgence des solutions pratiques qui s'y rattachent. En un mot la Géométrie forme un tout doctrinal, dont les problèmes de mesure utilisent les déductions.

On distingue immédiatement les grandes divisions que la logique introduit dans cet ensemble. Elles ne sont pas de tout point conformes au développement historique, parce que les découvertes successives ont entremêlé différentes sortes de questions ; on a vu des sujets plus difficiles abordés, grâce à de nouvelles méthodes, tandis que les sujets traités par les méthodes anciennes n'étaient pas encore entièrement épuisés. Mais aujourd'hui, au point d'avancement où est la Science, c'est l'ordre logique beaucoup plutôt que l'ordre historique qu'il faut consulter.

Tout d'abord la Géométrie — ou plus exactement les matières qui sont étudiées sous ce nom — forme deux grandes branches : je les désignerai par les qualificatifs de *concrète* et d'*abstraite*. Les brèves indications que j'ai données à l'occa-

sion des parallèles mettent sur la voie de ce qu'il faut entendre par « Géométrie abstraite » : c'est celle qui s'affranchit ou se prive d'un ou plusieurs des axiomes dus à l'observation. On peut construire ainsi, comme je l'ai déjà remarqué, des enchaînements fort rationnels mais dont les conclusions souvent ne sont pas en relation avec le monde extérieur. Mais ce n'est pas cette nature de spéculations que j'examine. Je me tiens à la « Géométrie concrète », qui réclame comme bases les vérités suggérées par l'expérience et spécialement celles que j'ai énumérées dans le Chapitre précédent.

Elle peut se subdiviser à son tour en Géométrie spéciale et en Géométrie générale. La première procède par l'étude directe d'un certain nombre de types de figures et cherche à épuiser successivement les propriétés de chacun d'eux. Son action est limitée soit par la difficulté du sujet, soit surtout par l'impossibilité d'aborder séparément chacun des types que notre imagination est apte à concevoir ; on se borne nécessairement aux plus importants et aux plus usuels. Les anciens ont presque exclusivement exploité ce champ. A l'exception de quelques entreprises partielles (notamment le procédé d'*exhaustion*

d'Archimède), ils n'ont pas eu recours aux méthodes beaucoup plus fécondes qui, entre les mains de Descartes et de Leibnitz, devaient ouvrir de si vastes horizons aux savants modernes. Ce partage historique fait souvent désigner sous les noms d'*ancienne* et de *moderne* les deux branches de la Géométrie concrète.

I. — GÉOMÉTRIE ANCIENNE OU SPÉCIALE.

L'étude individuelle des types procède naturellement des plus simples aux plus compliqués. Les divisions qui s'offriraient immédiatement à l'esprit sont les suivantes : 1° figures planes rectilignes, 2° figures planes curvilignes, 3° figures à surfaces planes, 4° figures à surfaces courbes. Mais cette hiérarchie est souvent troublée par suite des habitudes prises et de l'influence de l'ordre historique, qui fait maintenir dans telle division certains objets étudiés de bonne heure par les philosophes grecs, alors que logiquement ils appartiennent à une autre division. Inversement la Trigonométrie est présentée à part et après la Géométrie ancienne, tandis que suivant

l'ordre des idées elle devrait figurer dans la deuxième division. Il faut donc considérer l'échelle ci-dessus comme un simple indice de la distribution qui se ferait naturellement, si l'on se plaçait au seul point de vue du développement de la conception géométrique.

I. FIGURES PLANES RECTILIGNES.

Ce groupe comprend, d'une part, les polygones ou figures à contours rectilignes et, d'autre part, les systèmes de droites qui ne se rencontrent pas ou les parallèles. Parmi les polygones, on s'attache surtout aux trois premiers degrés, savoir : 1° l'angle ou polygone de deux côtés, non fermé; 2° le triangle ou polygone de trois côtés; 3° le quadrilatère ou polygone de quatre côtés. Au delà on considère principalement les polygones réguliers, c'est-à-dire formés de côtés et d'angles égaux.

La théorie du triangle est capitale en Géométrie, parce que la vie pratique et les plus hautes Sciences, notamment la Géodésie et l'Astronomie, conduisent à ce qu'on appelle la *résolution d'un triangle*, c'est-à-dire à la détermination de quelques-uns de ses éléments quand par avance

on connaît les autres. Il faut donc se préoccuper d'examiner tous les cas qui entraînent l'égalité de deux triangles et où, par suite, des relations suffisantes peuvent être établies entre les éléments d'un même triangle. Cette théorie, quand elle arrive aux calculs numériques, j'entends l'évaluation des côtés au moyen des angles et réciproquement, exige le concours de la Trigonométrie qui logiquement ne peut être exposée que dans la deuxième division et en fait l'est beaucoup plus tard. La question du triangle, telle qu'elle figure dans la première division et telle qu'elle est réellement enseignée dans les débuts de la Géométrie, est donc partielle et ne devient complète que longtemps après.

Cette première partie de l'étude du triangle est remarquable par sa simplicité. Elle n'est que l'application immédiate des axiomes développés dans le second Chapitre. Grâce aux procédés de superposition ou de coïncidence, de rotation autour d'un côté, et à la faveur des principes que deux droites qui ont deux points communs coïncident, que tous les angles droits sont égaux, que d'un point on peut toujours mener une perpendiculaire à une droite, etc., on résout comme en se jouant presque toutes les questions qui se

présentent. L'exposé ne se complique véritablement que lorsqu'on veut prouver, d'une façon directe et en se passant de l'axiome v (ou de tout autre axiome analogue), que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Cette démonstration contraste tellement avec celles qui précèdent et celles qui suivent, qu'il suffit, croyons-nous, de la parcourir pour décider, abstraction faite de toute autre considération, qu'elle n'est pas à sa place et qu'on fait violence aux règles d'une bonne méthode. Aussi, me paraît-il bien préférable d'édifier la théorie des parallèles, à l'aide d'un axiome ou postulatum approprié, et d'en faire sortir, comme corollaire, la proposition relative à la somme des angles d'un triangle. Cette théorie des parallèles est la principale pierre de touche entre la Géométrie concrète et la Géométrie abstraite. Dès qu'on met en question l'axiome ou postulatum fondamental on sort de la réalité physique pour entrer dans le domaine du conventionnel.

L'examen des polygones réguliers amène une interversion. Pour traiter le sujet avec fruit, il faut envisager concurremment le cercle, qui met en lumière la possibilité de tracer ou tout au moins de concevoir un polygone régulier d'un

nombre quelconque de côtés. Par réciprocité, la connaissance des polygones réguliers procure la mesure de la circonférence et de la surface du cercle, grâce au principe général des limites. En dehors de ce résultat capital, l'étude des polygones dont le nombre des côtés dépasse quatre ne comporte pas des applications très nombreuses.

2. FIGURES PLANES CURVILIGNES.

D'après le mode adopté pour l'exposition de la Géométrie, cette deuxième division est bien loin de comprendre toutes les matières qui en dépendraient naturellement. Ainsi, la Trigonométrie est enseignée à part, ce qui crée contre elle le préjugé de la difficulté, accru encore par la bizarrerie des noms dont on y fait emploi, alors qu'en réalité la Trigonométrie est une simple extension des propriétés du cercle. En outre, plusieurs courbes planes, dont les anciens avaient poussé fort loin la théorie et qu'il est d'usage d'explorer à l'aide des procédés de la Géométrie élémentaire, — sans préjudice des méthodes générales qu'on leur applique plus tard — sont rejetées hors de cette deuxième division, dont

elles font logiquement partie. Je citerai l'ellipse, l'hyperbole et la parabole qui, sous la rubrique de sections coniques, ont exercé la sagacité de tant d'illustres géomètres chez les anciens et même chez les modernes. Il semblerait rationnel de réserver une place à ces trois courbes dans la Géométrie élémentaire, d'autant plus que celle-ci comprend l'étude du cône et que l'intersection du cône par un plan engendre ces mêmes courbes. Mais on a pris le parti de les disjoindre, comme la Trigonométrie, à cause des importants développements qu'elles ont reçus et qui ont paru dépasser le cadre d'une exposition de début. A plus forte raison les courbes telles que la cycloïde, l'hélicoïde, la chaînette, etc., bien qu'ayant fait l'objet de recherches directes, ne sont pas admises dans cette division. Celle-ci, réduite à peu près au cercle et à la circonférence, ne saurait prendre une grande extension. Les propositions les plus notables ont trait à la mesure de l'aire et du périmètre en fonction du rayon, à la faveur du procédé qui consiste à voir dans le cercle la limite des polygones réguliers inscrits et circonscrits.

Il n'est pas surprenant que, seul entre toutes les courbes envisagées par les géomètres grecs,

le cercle ait été maintenu dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Cette préférence se justifie à la fois par la simplicité du type et par les propriétés exceptionnelles qui le rapprochent de la ligne droite et parfois l'identifient avec elle. De là cette tendance qui s'est fait jour de bonne heure à considérer la ligne droite comme un arc de cercle de rayon infini (il faudrait dire indéfini). On aperçoit les analogies — et aussi les erreurs — auxquelles ce point de vue peut conduire. Les rayons, qui sont normaux à l'arc, deviennent des perpendiculaires à la droite; d'où cette impression fausse que des perpendiculaires à une droite ou des parallèles se rencontreraient à l'infini. De là à la notion de la pluralité des parallèles partant d'un même point, il n'y a qu'un pas. Mais cette pluralité, qui ne le sent? est un pur mirage. Pour que les rayons fussent perpendiculaires à la droite, il faudrait que le centre du cercle pût réellement être transporté à l'infini, ce qui n'a pas de sens. Or, le centre étant fixé quelque part — si loin qu'on veut, mais quelque part — les rayons, sauf un, sont plus ou moins obliques à la droite, et les soi-disant parallèles s'évanouissent. Quand elles apparaissent, il n'y a plus ni centre ni

cercle, il n'y a qu'une ligne droite avec ses propriétés personnelles et ses perpendiculaires toujours équidistantes.

Il est bien clair qu'un arc de rayon suffisant ne diffère pas pratiquement d'une ligne droite. Avec cet arc, substitué à la ligne droite, on peut, nous l'avons constaté, construire une Géométrie dont les résultats seront très voisins de ceux de la Géométrie ordinaire : le postulatum d'Euclide devient approximatif : la somme des trois angles d'un triangle approchera de deux angles droits (d'autant plus que le triangle sera plus petit), mais elle ne les égalera jamais; les théorèmes classiques sur la similitude cesseront d'être rigoureusement exacts. Par contre, l'égalité des angles droits persistera, parce que les arcs de même rayon peuvent se superposer, à l'instar des lignes droites, et glisser sur eux-mêmes sans se déformer.

Si la Géométrie ancienne est ainsi limitée dans les Traités usuels, son domaine naturel n'en subsiste pas moins et mérite l'attention. Un regard d'ensemble doit embrasser en même temps la Trigonométrie ainsi que les diverses courbes qui se déroulent dans un plan. Je ne m'étendrai pas

sur ces dernières qui, au point de vue de la méthode, n'offrent rien de particulier. Chacune d'elles est traitée selon les procédés qui lui conviennent. Le grand mérite des géomètres a été, avec de faibles ressources, d'approfondir la nature de ces courbes au point d'en mettre à nu les propriétés les plus cachées. Le côté faible de tels travaux, s'il est permis de s'exprimer ainsi, c'est qu'ils sont exclusifs aux types mêmes qui en sont l'objet et qu'ils n'ouvrent pas la voie aux conquêtes sur des types nouveaux. Chaque Chapitre se clôt, sans préparer le suivant et, sauf l'habitude acquise, chaque fois presque tout est à recommencer.

Il n'en est pas de même de la Trigonométrie. Bien qu'elle emploie des procédés analogues et qu'elle se concentre elle aussi sur une figure spéciale, le cercle, et sur quelques droites qui peuvent y être menées, elle aboutit à des résultats vraiment généraux, à raison du nombre immense d'applications dont ils sont susceptibles. Elle fournit des relations entre les côtés et les angles du triangle, ce qui permet de le *résoudre* dans tous les cas, c'est-à-dire de trouver la valeur numérique des éléments inconnus lorsque les éléments connus sont suffisants pour déterminer sa

forme géométrique. Or, le triangle, tout en n'étant par lui-même qu'une figure particulière, joue un tel rôle dans beaucoup de problèmes et constitue un si puissant moyen de découvertes, que résoudre un triangle est fréquemment le dernier terme des questions les plus compliquées. La *triangulation* ou l'art de ramener les figures à des triangles et de calculer ces derniers, alimente une des branches les plus importantes des recherches géodésiques ou astronomiques. Aussi, a-t-on été conduit à mesurer, une fois pour toutes, et à consigner, dans des *Tables trigonométriques*, la grandeur des droites menées dans le cercle, en correspondance avec la valeur des angles au centre qui les déterminent. Les angles sont pris à partir de zéro et étagés suivant des accroissements extrêmement faibles, de telle sorte que les angles envisagés dans un cas spécial ne diffèrent pas d'une manière appréciable de certains de ces angles préalablement fixés. Les Tables font donc connaître, pour les angles donnés, les valeurs des lignes trigonométriques et fournissent les éléments nécessaires pour calculer les côtés, et *vice versa*. Il est regrettable, à mon avis, qu'une Science aussi simple et, en somme, aussi facile que la Trigonométrie, ne

soit pas enseignée, à sa place naturelle, dans la Géométrie ordinaire. Elle serait, je crois, mieux comprise et plus volontiers cultivée.

3° FIGURES A SURFACES PLANES.

Les figures formées de surfaces planes introduisent un élément de plus, le volume. Mais elles ne présentent pas de difficultés sensiblement plus grandes que celles de la première division. Le plan joue le même rôle que précédemment la ligne droite. Or nous avons vu que le plan possède des propriétés correspondantes, en sorte que le même ordre de raisonnement trouve à s'y appliquer. J'ajoute que les figures considérées comprennent à peu près le même nombre d'éléments et sont rangées en catégories semblables. Le triangle ou surface délimitée par le nombre minimum de côtés est représenté par le tétraèdre ou volume enclos par le nombre minimum de faces, qui est quatre. Le carré, le rectangle sont représentés par le cube, le parallélipipède droit, dont le nombre de faces est de six. Viennent ensuite les pyramides et les prismes, volumes formés sur une base polygonale, à l'aide de plans aboutissant soit à un sommet donné, soit à un

polygone égal et parallèle à la base. Je ne m'arrêterai pas sur ces diverses figures dont l'étude ne soulève pas de question nouvelle. De même que pour les polygones, on ne multiplie pas beaucoup les catégories sur lesquelles se concentre l'attention et dont la principale réalisation se rencontre dans la cristallographie. La Nature offre ici une riche mine, dont la Physique et la Chimie ont encore rehaussé l'importance.

Les polygones réguliers ayant procuré la mesure de la circonférence et de la surface du cercle, il semblerait naturel de demander, par analogie, aux polyèdres réguliers la mesure de la surface et du volume de la sphère. Celle-ci serait regardée comme la limite de polyèdres inscrits et circonscrits, à facettes de plus en plus nombreuses. Ces facettes devraient d'ailleurs être pareilles entre elles, à raison de l'uniformité de la sphère; en d'autres termes les polyèdres seraient réguliers. Mais on sait que de tels polyèdres n'existent qu'en nombre limité et que leurs éléments ne peuvent être modifiés par voie de continuité. Saisissant exemple de l'abîme qui peut exister — et que j'ai signalé à l'occasion de la théorie des parallèles — entre un phénomène variable et un phénomène fixe, *sui generis,*

qu'on voudrait considérer comme le dernier terme du phénomène variable.

En fait, dans l'espèce actuelle, la difficulté a été éludée, d'une façon simple et ingénieuse, en regardant la sphère, non comme une limite de polyèdres, mais comme la limite de corps ronds engendrés par des polygones réguliers, inscrits et circonscrits à un demi grand cercle de la sphère, qui tourne autour de son diamètre.

Je n'entre pas dans l'examen des particularités relatives aux polyèdres réguliers. Je me borne à constater la similitude qui existe entre les problèmes de la troisième division et ceux de la première. Les catégories de formes se correspondent à peu près exactement, les notions de perpendicularité, de parallélisme sont les mêmes, les procédés diffèrent peu, le plan se substitue presque mot pour mot à la ligne droite.

7. FIGURES A SURFACES COURBES.

De même que la deuxième division, par la variété des courbes examinées et par la Trigonométrie, occuperait dans un exposé didactique une place incomparablement plus étendue que la

première division, de même la quatrième acquiert une extension beaucoup plus grande que la troisième.

Les Traités élémentaires réduisent la quatrième division à ce qu'on appelle les *trois corps ronds:* la sphère, le cylindre et le cône. Mais en réalité la Géométrie spéciale est allée beaucoup plus loin et elle a abordé, par les mêmes méthodes, des formes beaucoup plus compliquées et qui ont exigé une rare puissance d'investigation. De ce nombre sont : l'ellipsoïde, l'hyperboloïde et le paraboloïde de révolution, le tore, les surfaces hélicoïdales et d'autres que je pourrais citer. Ces figures sont définies de deux façons. Tantôt par une propriété caractéristique, exemples : la sphère, dont la surface est partout à la même distance d'un point intérieur appelé centre, et le cylindre circulaire droit dont les points sont à égale distance d'un axe intérieur. Tantôt et plus souvent par le mode de génération qui indique comment la figure peut être décrite; ainsi la sphère est obtenue par la rotation d'un cercle autour de son diamètre, l'ellipsoïde par la rotation d'une ellipse autour de son grand axe, le tore par la rotation d'un cercle autour d'une droite extérieure, le cône droit par la rotation

d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

Quelle que soit la figure elle constitue, par sa définition même, un cas particulier, et elle exige pour son exploration un procédé approprié. J'entends par là que les efforts développés sur un type ne servent pas à l'ordinaire ou du moins ne servent qu'indirectement pour un autre type. Il y a autant de programmes de recherches que d'exemples envisagés. C'est ce qui fait l'intérêt toujours nouveau mais aussi le manque de fécondité des travaux de cette nature. Aussi peut-on avancer que plus cette branche s'est étendue, plus on a dû appeler des procédés généraux, moins aléatoires.

Telles sont les quatre divisions dans lesquelles s'enferme la Géométrie dite ancienne ou cultivée à la manière des anciens. Elle a continué à s'enrichir sous la main des modernes et aujourd'hui encore elle compte d'illustres adeptes. Néanmoins on doit prévoir son épuisement. Illimitée en théorie, elle est limitée en fait par la difficulté croissante de créer de nouveaux types à l'aide de tels procédés et par le découragement que fait naître la perspective de solutions de plus

en plus incertaines. Les premiers types, comme la sphère, le cylindre, le cône, etc., ont été inspirés par la vue des objets extérieurs ou par les nécessités de l'industrie humaine. Les suivants ont pris forcément une allure arbitraire et n'ont pu se motiver que par le haut intérêt scientifique qu'ils excitaient. Entrés dans cette voie les géomètres se trouvent de moins en moins récompensés de leurs efforts. Parfois un inventeur de génie rajeunit le sujet, mais dans l'ensemble le progrès est beaucoup moins sensible que sur les autres branches des Mathématiques.

II. — GÉOMÉTRIE MODERNE OU GÉNÉRALE.

La Géométrie moderne a été suscitée par le besoin de disposer d'une méthode plus sûre pour l'étude des formes et pour la solution des questions qu'elles soulèvent. Pressentie en quelques points aux temps de la Grèce, elle n'a pris son essor et n'a revêtu sa forme définitive que sous l'impulsion des savants modernes, particulièrement de Descartes et de Leibnitz. Bien que ces deux grands génies aient été puissamment aidés

par les travaux de leurs prédécesseurs et que l'œuvre même ne soit pas sortie achevée de leurs mains, on doit cependant les regarder comme les véritables créateurs de la nouvelle théorie, parce qu'ils l'ont conçue avec une généralité et lui ont imprimé une régularité qui n'avaient pas été soupçonnées avant eux.

Il importe de se prémunir dès maintenant contre une idée fausse : ce serait de croire que la Géométrie moderne a pu ou dû changer les bases de la Géométrie ancienne. Non, et l'on ne saurait mieux comparer son rôle qu'à celui de l'Analyse dans la Science des forces. La constitution d'une Mécanique rationnelle n'a nullement affaibli, a rehaussé au contraire l'importance des lois naturelles sur lesquelles s'appuyaient les premiers théoriciens. Les développements seuls ont pris un caractère abstrait ou purement mathématique. Mais les données initiales, celles auxquelles le Calcul s'applique, sont restées ce qu'elles étaient, des phénomènes physiques constatés et contrôlés par l'observation. Toute tentative pour se soustraire aux enseignements qu'ils apportent et pour édifier une Science en dehors d'eux aboutit à des résultats conventionnels, qui ne peuvent nous instruire

exactement sur le monde extérieur. De même la Géométrie moderne, nonobstant le caractère exclusivement mathématique de sa méthode, ne saurait se passer de la Géométrie ancienne, je veux dire de ses bases essentielles. Elle ne conçoit pas autrement l'angle, le plan, la ligne droite, le parallélisme. Elle est forcée, comme sa devancière, d'emprunter à l'expérience les axiomes qui sont le point de départ de toute démonstration. Elle accepte et utilise les propositions établies sur les figures les plus importantes et les plus usuelles, le triangle, le cercle, la sphère. En un mot elle prolonge et élargit la Géométrie ancienne, mais elle ne la remplace pas. Elle en fait au contraire son assise solide pour s'élever de là à des hauteurs où l'autre n'accède pas. Celui qui, sous prétexte d'ouvrir à la nouvelle Géométrie des horizons plus vastes encore, entreprendrait de changer le caractère des concepts fondamentaux ou dénierait quelques-uns des axiomes puisés au contact du monde extérieur, manquerait à la pensée de ses fondateurs qui dans l'entraînement de leur succès n'ont jamais envisagé l'espace, la ligne droite, les parallèles, autrement que ne l'avaient fait les philosophes de l'antiquité.

La Géométrie moderne combine deux inventions : celle de Descartes et celle de Leibnitz. Comme elles sont absolument distinctes dans leur esprit et dans leur objectif immédiat, il convient de les examiner séparément et de marquer la part de chacune dans le résultat final.

1° INVENTION DE DESCARTES OU APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

L'invention de Descartes, telle qu'elle est actuellement comprise et appliquée, repose sur cette idée capitale que toute courbe susceptible d'une définition géométrique peut être exprimée par une équation algébrique à deux inconnues — je parle pour le moment des figures planes. Réciproquement, toute équation peut être conçue comme représentant une courbe géométrique.

Cette idée, qui nous paraît si simple et si évidente, fut un objet de surprise pour les contemporains de Descartes. On ne vit pas tout d'abord ce qu'elle était réellement, l'origine d'une révolution dans les méthodes. L'inventeur eut quelque peine à en faire accepter l'exactitude et à en démontrer la fécondité. Les applications ont dépassé ce qu'il était permis d'espérer. Non seule-

ment la Science l'a faite sienne et y trouve un champ de spéculations inépuisable, mais elle est devenue en quelque sorte banale et familière aux esprits les plus étrangers à la Géométrie. Il n'est personne aujourd'hui qui, en présence d'une série de faits en relation avec le temps, ou avec la distance, ou avec tout autre élément pris pour base, ne songe immédiatement, pour rendre l'enchaînement plus clair, à l'exprimer sous forme d'une courbe, dont la coordonnée verticale est le fait à enregistrer. Les statisticiens qui veulent embrasser du regard le développement du commerce, de la population, de la fortune publique, emploient continuellement ce procédé qui n'est que l'idée même de Descartes, réduite, il est vrai, à la partie purement graphique.

On se rend compte aisément que toute courbe géométrique plane peut être exprimée par une équation à deux variables. En effet un point quelconque d'un plan est déterminé par ses deux coordonnées ou par ses distances à deux axes, que je suppose rectangulaires. Si ce point appartient à une courbe, les deux coordonnées ne peuvent avoir à la fois des valeurs arbitraires, indépendantes l'une de l'autre. Mais ces valeurs doivent satisfaire à une équation de condition, à

savoir l'équation qui exprime la propriété caractéristique de la courbe, par laquelle celle-ci peut être définie. Si le point se trouve, par exemple, sur un cercle dont les axes occupent le centre, les coordonnées sont soumises à la condition que la somme de leurs carrés est constante ou égale au carré du rayon. De là une équation entre les deux variables que sont les coordonnées. Si le point se trouve sur une ellipse, les coordonnées devront de même réaliser la condition que la somme des distances aux deux foyers est constante, ou toute autre condition équivalente. D'une façon générale, la courbe définie géométriquement apporte une condition nécessaire à laquelle les coordonnées doivent satisfaire et qui se traduit par une relation algébrique, devenue ainsi l'équation même de la courbe.

Réciproquement une équation à deux variables étant donnée, on peut imaginer que l'une des deux variables représente l'abscisse d'une courbe et que l'autre variable en représente l'ordonnée. A chaque valeur de l'abscisse correspond, en vertu de l'équation même, une valeur déterminée de l'ordonnée et par suite la position précise d'un point. La succession de tous ces points

prend la forme d'une courbe, laquelle est dès lors le lieu géométrique des points qui satisfont à la condition ou à la relation donnée. La courbe ainsi obtenue jouit de propriétés qui étaient renfermées en germe dans l'équation et qu'une saine interprétation met en évidence. En résumé la conception algébrique peut être substituée à la conception géométrique, ou pour mieux dire les deux conceptions n'en font qu'une : l'esprit s'habitue à ne voir dans une équation à deux variables que l'image virtuelle d'une courbe plane qui peut à tout instant être retracée.

Dès lors, les catégories d'équations représentent des catégories de courbes. Si l'on classe les équations suivant leur *degré*, chaque degré correspond à une famille de courbes réunies par cette parenté algébrique. Ainsi — et c'est peut-être là le spécimen le plus mémorable — le deuxième degré comprend le cercle et les trois sections coniques. Ces courbes fameuses examinées isolément par les géomètres de l'antiquité, et chez lesquelles ils avaient reconnu cette particularité remarquable de pouvoir être engendrées sur le même cône par l'intersection d'un plan diversement incliné, se trouvent rapprochées par cet autre caractère, bien différent, d'être

exprimables par des équations du même degré. Il est donc possible d'établir des familles de courbes, de même que dans l'histoire naturelle on établit des familles de plantes ou d'animaux, reconnaissables à certains traits communs, et dont l'étude peut être poursuivie d'un point de vue d'ensemble. Pareillement, dans la Géométrie analytique (qu'il eût été préférable d'appeler *Géométrie algébrique*, le terme d'Analyse étant réservé pour d'autres emplois), dans cette Géométrie, dis-je, il devient possible de rechercher des propriétés génériques dont la Géométrie spéciale ne donne pas l'idée. Ces travaux sont d'ailleurs sans limites, car rien n'impose l'obligation de s'arrêter à un type déterminé d'équations. Le champ indéfini des spéculations est ouvert, et l'on n'y rencontrerait pas de bornes si les difficultés de calcul n'augmentaient à mesure qu'on s'élève et ne venaient placer devant le géomètre des barrières effectives.

Il y a plus. Non seulement on substitue la notion de groupes généraux à celle de spécimens particuliers, mais on peut, d'un regard plus large encore, réunir ces groupes dans une vaste synthèse et rechercher les propriétés qu'ils possèdent en commun. Je citerai deux de ces pro-

priétés qui ont, de tout temps, sollicité vivement l'attention des géomètres : la tangence et la courbure. C'est là, on peut le dire, l'essence et le propre des courbes : en pénétrant ces caractères on connaît ce qu'il y a en elles de plus intime et de plus distinctif. Or, l'invention de Descartes a fourni le moyen de procéder à de pareilles investigations ou, du moins, de les concevoir dans toute leur généralité. Car, pour les effectuer intégralement, il est nécessaire de recourir à la seconde invention, celle de Leibnitz.

Je n'ai parlé que des courbes planes. Les surfaces non planes ou à trois dimensions donneraient lieu à des considérations analogues. Leur représentation analytique exige l'emploi de trois coordonnées. Réciproquement, les équations à trois variables servent à exprimer la position d'un point quelconque par rapport à trois axes fixes. La logique indiquerait de classer les surfaces d'après le degré de leurs équations. Mais, en fait, ce classement, déjà obscur pour les courbes d'un degré supérieur, perd toute signification pratique pour les surfaces : j'entends par là qu'on serait conduit à réunir sous la même rubrique des surfaces dont les propriétés géomé-

triques sont extrêmement différentes. On trouve plus simple, en général, de recourir au classement d'après le mode de génération.

De même qu'on étudie chez les courbes certaines propriétés communes, notamment la tangence et la courbure, de même on recherche pour les surfaces la position du plan tangent et la valeur de la figure, du type uniforme, qui représente la courbure en un point donné.

Les conditions se correspondent; le plan remplace la ligne droite et une surface à trois dimensions remplace le cercle de courbure. On aperçoit, sans qu'il soit besoin d'insister davantage, l'ampleur de la conception géométrique et, en même temps, les difficultés analytiques, souvent insurmontables, qui peuvent se rencontrer dans la solution effective du problème.

2° INVENTION DE LEIBNITZ OU APPLICATION DU CALCUL INFINITÉSIMAL AUX ÉQUATIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

L'invention de Leibnitz est arrivée à point pour suppléer à l'insuffisance de l'Algèbre proprement dite. Descartes avait supprimé les bornes de l'ancienne Géométrie en introduisant la représentation analytique. Mais les équations restaient

le plus souvent non résolues. Les calculs étaient indiqués, mais ils ne pouvaient être effectués. De même qu'une méthode générale avait manqué à la Géométrie, une méthode générale manquait maintenant à l'Algèbre.

C'est alors que Leibnitz, concurremment à Newton, mais sous une forme meilleure, proposa ses merveilleux procédés connus sous le nom d'*Analyse infinitésimale*.

Découverte à l'occasion de problèmes de Géométrie, elle est beaucoup plus générale que cette Science. Elle ne s'applique pas seulement aux équations qui expriment des phénomènes géométriques, mais aussi à celles qu'on rencontre en Mécanique, en Physique; en un mot, elle s'applique à toutes les relations algébriques, quelles qu'en soient la forme et la signification. La méthode est, d'ailleurs, la même partout, et nous n'avons qu'à l'envisager dans l'ordre de faits qui nous intéresse. Il en est deux exemples saillants : la détermination des tangentes et l'évaluation des longueurs ou des surfaces. Ces deux opérations sont même tellement adéquates au mécanisme du Calcul infinitésimal qu'on a quelque peine à les concevoir séparément.

Le Calcul infinitésimal, on le sait, a essentiel-

lement en vue la mesure des limites de rapport, d'une part, et des limites de somme, d'autre part. De là ses deux branches : Calcul différentiel et Calcul intégral. Le premier recherche la limite vers laquelle tend le rapport des accroissements des deux variables d'une équation — pour ne parler que des courbes planes — lorsque ces accroissements, en vertu de la relation qui les unit, convergent simultanément vers zéro. Si les variables représentent les deux coordonnées d'une courbe, le Calcul différentiel procure donc la limite vers laquelle tend le rapport des accroissements de ces coordonnées, c'est-à-dire la direction de la tangente à la courbe. En effet, la position de la tangente est la limite des positions de la sécante quand les deux points se rapprochent indéfiniment, et la direction de la sécante est constamment indiquée par le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à l'accroissement de l'abscisse, quel que soit l'intervalle des deux points d'intersection. Le Calcul infinitésimal apporte ainsi la solution pratique du problème géométrique posé par Descartes. En résumé, Descartes avait trouvé que la direction de la tangente à une courbe était déterminée par la limite du rapport des accroissements de ses

coordonnées ou des accroissements des variables de l'équation. Leibnitz, à son tour, fournit le moyen de calculer ce rapport : il le déduit, par un procédé infaillible, de l'équation considérée par Descartes.

Dès lors, le problème de la tangence est résolu, non seulement pour le cercle, les sections coniques et les autres courbes qui avaient fixé individuellement l'attention des géomètres, mais il est résolu aussi pour toutes les courbes dont l'expression algébrique est connue. Il en serait de même pour la détermination du rayon de courbure, question du même ordre, intimement liée à la précédente. Le géomètre peut désormais se passer des modes incertains et laborieux qui présidaient auparavant à ses recherches. Ceux qui continuent d'y recourir le font par une sorte d'amour de l'art, fort compréhensible d'ailleurs, car les spéculations à la manière des anciens, précisément parce qu'elles n'ont pas le caractère un peu mécanique de l'Analyse moderne, offrent à l'esprit un attrait supérieur. Malheureusement, cet attrait ne suffit pas pour assurer la solution.

Je passe au second problème, celui des longueurs et des surfaces. Ce que j'en ai dit, à

propos du concept des limites, dans la première partie de ce travail, montre que la difficulté est ramenée à celle de l'évaluation de la limite vers laquelle converge la somme de très petits côtés d'un périmètre ou de très petites surfaces rectangulaires, lorsque ces côtés et ces surfaces diminuent au delà de toute expression. Or, ces sommes sont précisément l'objet du Calcul intégral, de même que les rapports sont l'objet du Calcul différentiel. La seule dissemblance dans les résultats, c'est que le premier mécanisme est d'un effet immanquable, tandis que le second ne l'est pas. On ne sait pas toujours — il s'en faut — intégrer ou trouver la valeur d'une limite de somme. Nonobstant cette impuissance théorique, les géomètres sont parvenus, par d'ingénieux artifices, à étendre tellement la liste des réussites, que pratiquement bien peu de courbes intéressantes échappent à la méthode. En sorte que d'un point de vue d'ensemble on peut constater que la découverte de Leibnitz a reculé indéfiniment les bornes de l'ancienne Géométrie.

Je crois inutile de parler des surfaces non contenues dans le même plan, non plus que des volumes que ces surfaces peuvent enclore. Sauf le nombre des variables, qui est ici de trois au

lieu de deux, les mêmes procédés s'appliquent et des avantages analogues peuvent être obtenus.

CONCLUSION.

En résumé, les deux branches, spéciale et générale, de la Géométrie se relient l'une à l'autre par la communauté de leurs concepts et par les bases que la première fournit à la seconde. Malgré l'invasion du Calcul, qui semble donner à celle-ci un caractère abstrait et la séparer du monde physique pour la rejeter dans les Mathématiques pures, elle n'est pas, au fond, moins concrète que sa devancière. Elle emprunte les mêmes notions expérimentales et ne vit que par les matériaux que la Géométrie ancienne a amassés et lui fournit libéralement. Ce qui induit à lui attribuer un caractère strictement rationnel, c'est qu'elle ne discute pas les vérités géométriques dont elle fait usage. Elle paraît les accepter comme évidentes; mais ce n'est pas parce qu'elle en place la source dans la raison

pure, c'est uniquement parce que la Géométrie ancienne en ayant déjà dressé l'inventaire, elle ne se croit pas obligée de recommencer cette opération; elle s'en tient aux résultats acquis. Mais il importe de le répéter, l'invention de Descartes, non plus que celle de Leibnitz, n'ont rien changé aux bases de la Géométrie: l'espace, l'angle, la ligne droite, le plan, les parallèles sont restés ce qu'ils étaient auparavant. Le mode d'opérer sur ces éléments a changé, voilà tout. Le Calcul remplace des combinaisons graphiques, mais il s'appuie implicitement sur les mêmes axiomes et n'obtiendrait rien sans eux.

Quant à ces axiomes, les plus hautes spéculations analytiques ne sauraient en altérer la nature. La mise en équation d'une ligne ou d'une surface ne fait pas que la première des lignes, la droite, et la première des surfaces, le plan, ne soient pas douées de propriétés que l'observation seule a permis de connaître. Quelque évidente qu'elle apparaisse par elle-même, la propriété du plus court chemin nous a été révélée par l'expérience. Quel droit avions-nous d'affirmer *a priori* que l'arc de cercle, par exemple, est plus long que sa corde? Nous le voyons et nous le savons maintenant, mais à l'origine, au début de

nos sensations, nous n'aurions pu le proclamer. Nous pressentions tout au plus cette vérité, mais elle n'était point certaine à nos yeux avant qu'une épreuve précise l'eût mise hors de contestation. Et de même, comment pouvions-nous savoir que la surface d'une eau tranquille est susceptible de recevoir dans tous les sens l'empreinte d'une ligne droite ? C'est encore par l'application que nous en avons été instruits.

Plus tard, avec l'éducation prolongée de nos organes et de notre esprit, avec la netteté et la force de nos impressions, avec la sécurité que nous communique un contrôle maintes fois exercé, nous sommes portés à transformer en axiomes rationnels des lois physiques, après tout contingentes. Mais il y a un double intérêt à ne pas prendre le change. D'une part, une saine philosophie nous commande de bien connaître les bases de notre certitude. Il existe un second motif d'un ordre, je dirai, plus pratique, et ce motif est le suivant. Si les vérités premières de la Géométrie sont empruntées à la raison pure, nous n'avons pas le droit d'en augmenter le nombre. Elles sont ce qu'elles sont, et nous avons l'obligation de rattacher à elles par un lien rigoureux, par une série de déductions logiques.

les autres vérités géométriques. Si au contraire ces axiomes sont puisés dans l'observation de la Nature, il ne nous est pas interdit d'en établir un de plus, par voie expérimentale, lorsque ceux déjà admis ne nous suffisent pas et que le raisonnement est impuissant à fournir une démonstration irréfutable. Tel est le cas pour le postulatum d'Euclide. Si le grand géomètre avait résolument rangé parmi les axiomes, en lui donnant au besoin une forme plus saisissante, la nouvelle vérité dont il avait besoin pour construire la théorie des parallèles, ses successeurs auraient probablement suivi sa trace, et une grande difficulté théorique eût ainsi été évitée. En se contentant au contraire du titre trop réservé de postulatum ou de demande, Euclide a laissé supposer que son œuvre était inachevée, et dès lors il a ouvert la voie à toutes sortes de recherches qui devaient aboutir à la Géométrie abstraite, c'est-à-dire à un ordre d'idées bien différent de celui qui avait été le sien.

J'ai longuement insisté, au cours de ce travail, afin de bien marquer le caractère des vérités initiales. Il ne s'agit pas, on le comprend, d'une querelle de mots, mais d'une divergence de fond

qui me paraît avoir son importance, au point de vue des progrès de la Science. Autant il est souhaitable que la haute Analyse élargisse le plus possible le champ des spéculations géométriques, autant il est nécessaire que les bases elles-mêmes restent intangibles. Plus l'édifice s'élève, plus les fondations doivent garder leur solidité.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION V

CHAPITRE PREMIER. — *Concepts de la Géométrie* 3

Espace 4
Distance 10
Volume, surface, ligne et point 13
Figures géométriques 21
Ligne droite 25
Ligne courbe 29
Surface plane ou plan 32
Surface courbe 35
Angle 37
Parallélisme 45
Cercle, sphère 52
Tangence 57
Limites 61

CHAPITRE II. — *Axiomes géométriques ou propriétés de la ligne droite et du plan* 67

I. La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre 70
II. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite 91
III. Une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens 97
IV. La ligne droite peut servir d'axe de rotation... 100
V. Une ligne droite qui a commencé par s'éloigner d'une autre ne peut pas ensuite s'en rapprocher, et réciproquement 105

Pages.

VI. Dans un plan on peut tracer des lignes droites dans tous les sens 115

Remarque sur les types élémentaires de la Géométrie 128

CHAPITRE III. — *Du problème géométrique* 137

I. Géométrie ancienne ou spéciale 140

1° Figures planes rectilignes 141

2° Figures planes curvilignes 144

3° Figures à surfaces planes 150

4° Figures à surfaces courbes 152

II. Géométrie moderne ou générale 155

1° Invention de Descartes ou application de l'Algèbre à la Géométrie 158

2° Invention de Leibnitz ou application du Calcul infinitésimal aux équations de la Géométrie 164

CONCLUSION 171

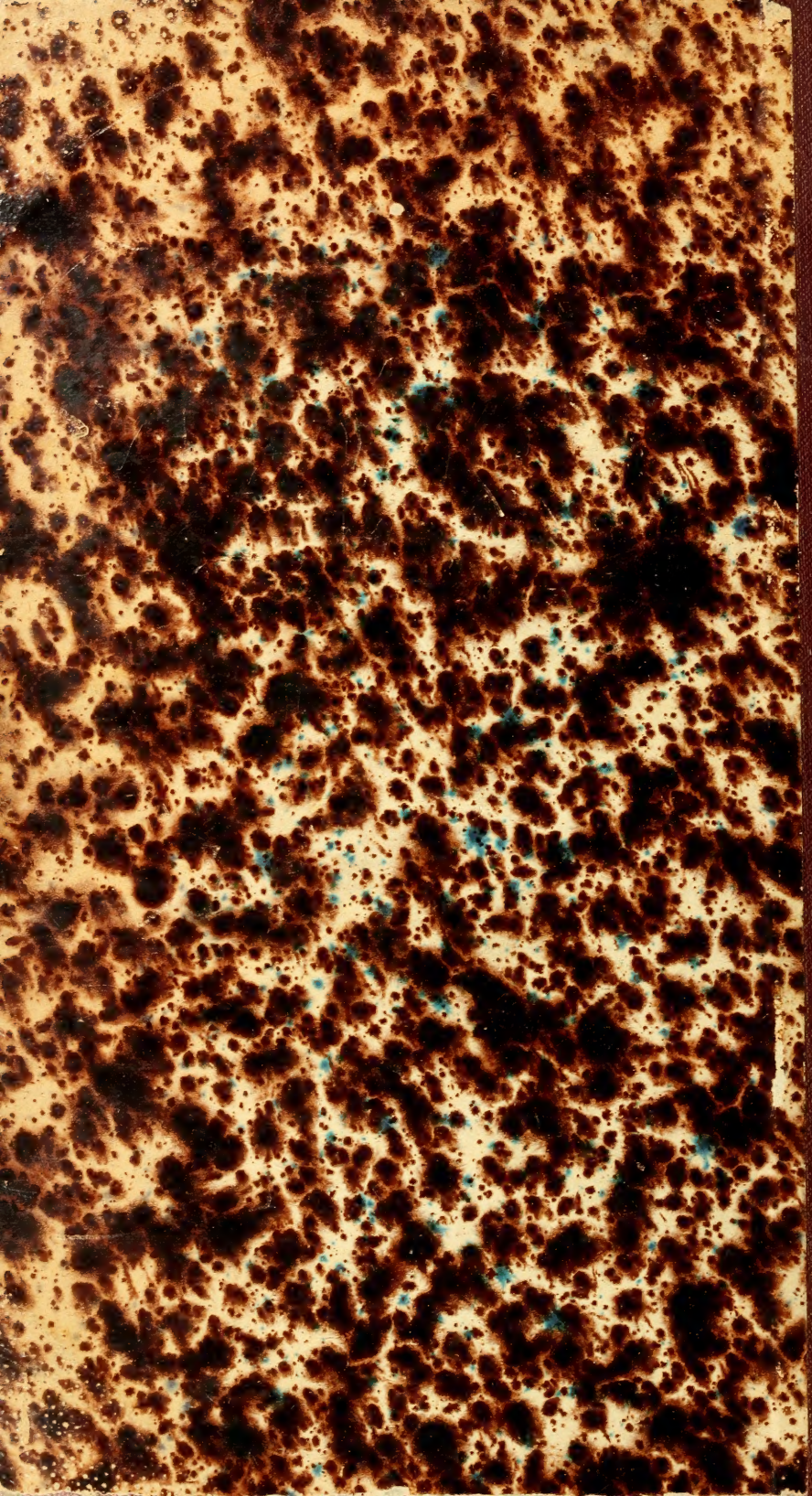
2821 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, rue des Grands-Augustins.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
445
F7

Freycinet, Charles Louis de Saulses de
De l'expérience en géométrie

P&ASci.

spine label ordered